Diplomarbeit

Über Isospektralität von topologischen Bällen

Angefertigt am
Mathematischen Institut

Vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Januar 2006

Von
Hagen Fürstenau
aus
Bonn-Bad Godesberg

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

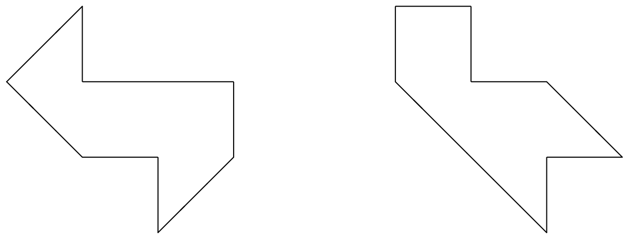
Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit topologischen Bällen, auf denen Z. Szabó in [Sza01] isospektrale Metriken konstruieren will. Wir zeigen, daß dieser Beweisgang fehlerhaft ist. Damit ist die Frage nach der Isospektralität der Beispiele offen, und wir untersuchen mögliche Ansätze, ihre Isospektralität oder Nicht-Isospektralität zu beweisen.

Wir geben zunächst einen kurzen Überblick über das Problem der Isospektralität. Für einen ausführlicheren Überblick vergleiche z.B. [Sch01]. Für eine Einführung in die Spektralgeometrie siehe z.B. [Ber86].

Das *Spektrum* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist das Eigenwertspektrum ihres Laplace-Beltrami-Operators unter Berücksichtigung von Vielfachheiten. (Für berandete Mannigfaltigkeiten werden Dirichlet- und Neumann-Randwertproblem betrachtet.) Zwei Mannigfaltigeiten heißen *isospektral*, wenn ihre Spektra übereinstimmen.

Ein wichtiges Problem der Spektralgeometrie ist die Frage, welche Eigenschaften einer Mannigfaltigkeit durch ihr Spektrum bestimmt sind. Die Ausgangsfrage, ob es überhaupt Mannigfaltigkeiten gibt, die isospektral aber nicht isometrisch sind, wurde bereits 1964 von J. Milnor positiv beantwortet [Mil64]. Seitdem sind zahlreiche Beispiele für isospektrale Mannigfaltigkeiten gegeben und dadurch eine große Anzahl von Eigenschaften gefunden worden, die nicht durch das Spektrum bestimmt sind. Umgekehrt sind bestimmte Eigenschaften wie die Dimension, das Volumen und die mittlere Skalarkrümmung (und allgemein alle Wärmeleitungskonstanten, vgl. z.B. [BGM71], [Gil84]) durch das Spektrum gegeben.

Für kompakte Gebiete in der Ebene kann das (Dirichlet-)Spektrum physikalisch als Spektrum der Eigenfrequenzen eines Trommelfells interpretiert werden, weshalb M. Kac die Isospektralitätsfrage hier als „Can one hear the shape of a drum?“ formulierte [Kac66]. C. Gordon, D. Webb und S. Wolpert gaben schließlich in [GWW92] die folgenden Beispiele für (Dirichlet- und Neumann-)isospektrale Gebiete in der Ebene, womit diese Frage negativ beantwortet wurde:



Noch unbekannt ist allerdings, ob es auch Beispiele mit glattem Rand gibt.

Eine große Klasse von Beispielen isospektraler Mannigfaltigkeiten kann mittels einer Methode von T. Sunada gewonnen werden, die besagt, daß bestimmte Sub-Überlagerungen einer Riemannschen Überlagerung isospektral sind [Sun85]. Aufgrund ihrer Konstruktion sind Beispiele dieser Art stets lokal isometrisch und nicht einfach zusammenhängend. Die ersten nicht lokal isometrischen Beispiele (mit Rand) wurden von Z. Szabó in [Sza99] gegeben, die ersten geschlossenen, einfach zusammenhängenden von D. Schüth in [Sch99].

In [Sza01] und [Sza05] sollten nun lokal nicht-isometrische Metriken auf topologischen Bällen und ihren Randsphären konstruiert werden. Unabhängig davon und mit anderen Methoden wurden solche Beispiele und sogar stetige Familien isospektraler Metriken in [Gor01] konstruiert.

Die vorliegende Arbeit sollte sich ursprünglich damit beschäftigen, den Beweis in [Sza01] zu analysieren und eventuell in den allgemeineren Kontext Riemannscher Submersionen zu stellen, wie sie in [Bal04] untersucht werden. Es stellte sich jedoch heraus, daß der Beweis an zwei Stellen Fehler aufweist, die auch nach Rücksprache mit dem Autor bisher nicht zufriedenstellend behoben werden konnten. Es erscheint zweifelhaft, ob die Beweisidee in ihrer ursprünglichen Form beibehalten werden kann. Daher beschreibt die Arbeit nun die Beweisidee aus [Sza01] sowie die auftretenden Probleme und stellt dann einen möglichen neuen Beweisansatz vor. Sie ist wie folgt aufgebaut:

In Kapitel 1 werden einige Grundbegriffe dargestellt. Abschnitt 1.1 definiert den Laplace-Beltrami-Operator und stellt seinen Spektralsatz vor. In Abschnitt 1.2 werden zweistufig nilpotente Lie-Algebren eingeführt, ihre Eigenschaften diskutiert und Beispiele gegeben, die in Kapitel 2 wieder aufgegriffen werden. In Abschnitt 1.3 wird dann der Laplace-Operator auf zweistufig-nilpotenten Lie-Algebren bestimmt, was die Grundlage für die beiden folgenden Kapitel schafft.

In Kapitel 2 werden zunächst die Elemente des Beweisganges aus [Sza01] dargestellt. Dazu werden in Abschnitt 2.1 die Mannigfaltigkeiten B_ρ und B'_ρ als topologische Bälle in den zweistufig nilpotenten Lie-Algebren $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$

eingeführt. Außerdem wird die Frage ihrer Isospektralität umformuliert, indem B'_ρ durch die isometrische Mannigfaltigkeit B^*_ρ in $\mathfrak{n}^*$ ersetzt wird. In Abschnitt 2.2 werden bestimmte Polynome auf einem Unterraum von $\mathfrak{n}$ bzw. $\mathfrak{n}^*$ definiert, die dann in Abschnitt 2.3 mit den Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf der Sphäre in Verbindung gesetzt werden. In Abschnitt 2.4 wird nach diesen Vorbereitungen schließlich die Beweisidee aus [Sza01] beschrieben, worauf in den Abschnitten 2.5 und 2.6 zwei Fehler dieses Ansatzes analysiert werden, so daß die Frage der Isospektralität der Beispiele wieder offen ist.

In Kapitel 3 stellen wir einen eigenen Ansatz vor, der möglicherweise hilfreich beim Beweis der Isospektralität oder Nicht-Isospektralität der fraglichen Beispiele ist. Die Idee dieses Ansatzes wird in Abschnitt 3.1 formuliert. Die Abschnitte 3.2 und 3.3 beschäftigen sich auf zweierlei Weise mit einem einfachen Spezialfall und analysieren die Schwierigkeiten, die sogar hier schon auftreten.

Im Anhang sind zwei Sätze aufgeführt, die im Verlauf der Arbeit benötigt werden, aber keinen engen thematischen Bezug zu ihr haben und daher zur besseren Lesbarkeit ausgegliedert wurden.

Ich möchte mich bei allen bedanken, die mich während meines Studiums unterstützt haben. Besonders danke ich Herrn Prof. Ballmann, der mir ein interessantes Thema für die Diplomarbeit gegeben und mich stets mit viel Geduld und gutem Rat betreut hat. Ebenfalls besonderer Dank gebührt Frau Prof. Schüth, durch die ich erstmalig zur Spektralgeometrie fand und die auch später immer für Fragen offen war, und Frau Prof. Carolyn Gordon, die mit mir die Fehler, auf die ich gestoßen war, diskutierte und mir wertvolle Hinweise zu ihrer Tragweite gab. Herzlich bedanken möchte ich mich außerdem bei Dr. Gregor Weingart, der mir einige Nachmittage opferte und viele Fragen beantwortete, und bei Jan Christoph Kinne für aufmerksames Korrekturlesen.

„Last but not least“ danke ich meiner Familie für die Unterstützung vielfältigster Art, die ich immer erfahren habe, und Su-hee, wie immer, für alles.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Das Laplace-Spektrum

Sei M eine (möglicherweise berandete) Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Man definiert den *Gradienten* einer Funktion $f \in C^1(M)$ als das Vektorfeld $\operatorname{grad} f$ auf M, für das in jedem Punkt $p \in M$ und für alle $v \in T_pM$

$$\big\langle (\operatorname{grad} f)_p,\, v \big\rangle = df_p(v)$$

Die *Divergenz* $\operatorname{div} X$ eines C^1-Vektorfeldes X auf M definiert man mit dem Levi-Civita-Zusammenhang ∇ von M als Spur des $(1,1)$-Tensorfeldes ∇X. Nun kann man den *Laplace-* oder *Laplace-Beltrami-Operator* Δ von M auf Funktionen $f \in C^2(M)$ durch

$$\Delta f := -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

definieren. Ist $\varphi : M \to M$ eine Isometrie, so sieht man aus den Definitionen

$$\Delta(f \circ \varphi) = -\operatorname{div}(d\varphi^{-1}(\operatorname{grad} f)) = (\Delta f) \circ \varphi \tag{1.1}$$

Sei $n = \dim M$. Sind E_i $(1 \leq i \leq n)$ Vektorfelder auf M, die in jedem Punkt $p \in M$ eine Orthonormalbasis von T_pM bilden, so gilt, da der Levi-Civita-Zusammenhang metrisch ist,

$$\begin{aligned}
\Delta f = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) &= -\operatorname{tr}\ \nabla(\operatorname{grad} f) = -\sum_{i=1}^{n} \big\langle \nabla_{E_i}(\operatorname{grad} f), E_i \big\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \Big(E_i \langle \operatorname{grad} f, E_i \rangle - \langle \operatorname{grad} f, \nabla_{E_i} E_i \rangle \Big)
\end{aligned}$$

und demnach

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \Big(E_i^2 - \nabla_{E_i} E_i \Big) \tag{1.2}$$

Sind $c_1, \dots, c_n$ Geodätische von M mit $c_i(0) = p$, so daß $\{c_1'(0), \dots, c_n'(0)\}$ eine Orthonormalbasis von T_pM ist, dann gilt insbesondere (mit $\partial_i := c_i'(0)$)

$$(\Delta f)_p = -\sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f$$

Auf euklidischen Vektorräumen ergibt sich damit die bekannte Gestalt des Laplace-Operators $-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. (Zuweilen wird der Laplace-Operator auch mit entgegengesetztem Vorzeichen definiert, wir wollen uns in dieser Arbeit aber an die hier aufgestellte Definition halten.)

Sei $\mathring{M}$ das Innere von M. Gibt es ein $f \in C^2(\mathring{M}) \setminus \{0\}$, so daß

$$\Delta f = \lambda f$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$, so heißt f *Eigenfunktion* und der Vektorraum aller solcher f *Eigenraum* von Δ zum *Eigenwert* λ. Ist der Rand ∂M nicht leer, so unterscheidet man das *Dirichlet-Randwertproblem*, für das zusätzlich $f \in C^0(M)$ und $f|_{\partial M} = 0$ gefordert wird, und das *Neumann-Randwertproblem*, für das $f \in C^1(M)$ und $V(f) = 0$ gelten soll, wobei V das äußere Einheitsnormalenfeld auf ∂M ist. (Wir wollen annehmen, daß M einen C^1-Rand hat.)

Satz 1.1 (Spektralsatz des Laplace-Operators auf Funktionen). *In jedem der oben genannten Fälle sind die paarweise verschiedenen Eigenwerte nicht-negative, reelle Zahlen und können zu einer Folge*

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \infty$$

angeordnet werden. Jeder Eigenraum ist endlich-dimensional und in $C^\infty(M)$ enthalten. Die Eigenräume sind orthogonal und ihre Summe liegt dicht in $L^2(M)$.

Zum Beweis dieses Satzes vgl. z.B. [Ber86]. Mit den Eigenwerten λ_i und den entsprechenden Eigenräumen E_i definieren wir das *Dirichlet-* bzw. *Neumann-Spektrum* von M als

$$\operatorname{spec}(M) := \{(\lambda_i, \dim E_i) \quad ; \ i \in \mathbb{N}\}$$

Zwei Mannigfaltigkeiten M und M' heißen *Dirichlet-isospektral* bzw. *Neumann-isospektral* (auf Funktionen), wenn

$$\operatorname{spec}(M) = \operatorname{spec}(M')$$

(Gilt für die Eigenwerte λ_i bzw. λ_i' lediglich $\lambda_i = \lambda_i'$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so heißen M und M' *isotonal*.)

1.2 Zweistufig nilpotente Lie-Algebren

In diesem Abschnitt stellen wir die Eigenschaften zweistufig nilpotenter Lie-Algebren und ihrer Lie-Gruppen mit linksinvarianten Metriken vor, die im Rest der Arbeit benötigt werden. Für eine ausführliche Diskussion siehe [Ebe94].

Definition 1.2. Eine Lie-Algebra $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot])$ heißt *zweistufig nilpotent*, wenn $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{n}) \neq \mathfrak{n}$ gilt. Dabei ist $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] := \operatorname{span}\{[n,n'] \ \ ; n,n' \in \mathfrak{n}\}$ das Kommutator-Ideal und $\mathfrak{z}(\mathfrak{n})$ das Zentrum der Lie-Algebra. Eine Lie-Gruppe heißt *zweistufig nilpotent*, wenn ihre Lie-Algebra zweistufig nilpotent ist.

Seien $\mathfrak{v}, \mathfrak{z} \neq \{0\}$ endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$, $\mathfrak{n} := \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$ (wir schreiben Elemente von $\mathfrak{n}$ in der Regel als $n = x + z$ mit $x \in \mathfrak{v}$ und $z \in \mathfrak{z}$ oder ähnlich) und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{n}$, so daß $\mathfrak{v} \perp \mathfrak{z}$. Sei ferner

$$\begin{aligned} J : \mathfrak{z} &\to \mathfrak{so}(\mathfrak{v}) \\ z &\mapsto J_z \end{aligned}$$

linear und nicht-trivial ($J \neq 0$). Dann definiert J eine bilineare Abbildung $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{v} \times \mathfrak{v} \to \mathfrak{z}$ durch:

$$\forall z \in \mathfrak{z} : \ \langle [x,y], z\rangle = \langle J_z(x), y\rangle \tag{1.3}$$

Wir setzen diese durch 0 auf $\mathfrak{v} \times \mathfrak{z}$, $\mathfrak{z} \times \mathfrak{v}$ und $\mathfrak{z} \times \mathfrak{z}$ und dann bilinear zu $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \to \mathfrak{z}$ fort und erhalten

Lemma 1.3.

(i) $\mathfrak{n}$ *ist mit* $[\cdot,\cdot]$ *als Lie-Klammer eine zweistufig nilpotente Lie-Algebra, und es gilt* $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] \subset \mathfrak{z} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{n})$.

(ii) Gibt es ein $z \in \mathfrak{z}$, *so daß* J_z *ein Automorphismus von* $\mathfrak{v}$ *ist, so ist* $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{n})$.

(iii) Ist J *injektiv, so gilt* $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] = \mathfrak{z}$.

Beweis.

(i) Nach Definition von $[\cdot,\cdot]$ gilt $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] \subset \mathfrak{z} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{n})$. Die Jacobi-Identität ist daher trivial erfüllt, denn alle Ausdrücke der Form $[a,[b,c]]$ sind 0. Die Schiefsymmetrie von $[\cdot,\cdot]$ ergibt sich aus der Schiefsymmetrie der J_z durch

$$\forall z \in \mathfrak{z} : \ \langle [x,y], z\rangle = \langle J_z(x), y\rangle = -\langle J_z(y), x\rangle = \langle -[y,x], z\rangle$$

Es bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}) \neq \mathfrak{n}$. Wäre aber $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$, also $\mathfrak{n}$ abelsch, so wäre $[x, y] = 0$ für alle $x, y \in \mathfrak{v}$ und damit

$$\forall x, y \in \mathfrak{v},\ z \in \mathfrak{z} :\ \langle J_z(x), y\rangle = \langle [x, y], z\rangle = 0$$

also $J = 0$, was ausgeschlossen war. Daher ist $\mathfrak{n}$ zweistufig nilpotent.

(ii) Wir zeigen $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{z}$. Sei dazu $x + z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{n})$ und $z' \in \mathfrak{z}$ so gewählt, daß $J_{z'}$ ein Automorphismus von $\mathfrak{v}$ ist. Dann gilt

$$\forall y \in \mathfrak{v} :\ \langle J_{z'}(x), y\rangle = \langle [x, y], z'\rangle = \langle [x + z, y], z'\rangle = 0$$

also $J_{z'}(x) = 0$ und damit $x = 0$, also $x + z = z \in \mathfrak{z}$.

(iii) Angenommen $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ wäre echter Unterraum von $\mathfrak{z}$. Dann gäbe es ein $z \in \mathfrak{z}$ mit $z \neq 0$ und $z \perp [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$. Also wäre

$$\forall x, y \in \mathfrak{v} :\ \langle J_z(x), y\rangle = \langle [x, y], z\rangle = 0$$

und damit $J_z = 0$, also J nicht injektiv. □

Die folgende Verallgemeinerung von Heisenberg-Algebren wurde zuerst in [Kap80] definiert:

Definition 1.4. Eine zweistufig nilpotente Lie-Algebra $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$, gegeben durch ein Skalarprodukt und ein Abbildung J wie oben, ist vom *Heisenberg-Typ*, wenn $J_z^2 = -|z|^2 \,\mathrm{Id}$ für alle $z \in \mathfrak{z}$. (Insbesondere gilt dann nach Lemma 1.3 $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{n})$.)

Lemma 1.5. *Ist $\mathfrak{n}$ vom Heisenberg-Typ, so gilt für $x \in \mathfrak{v}$ und $z, z' \in \mathfrak{z}$*

(i) $\langle J_z(x), J_{z'}(x)\rangle = \langle z, z'\rangle\, |x|^2$

(ii) $J_z \circ J_{z'} + J_{z'} \circ J_z = -2\,\langle z, z'\rangle \,\mathrm{Id}$.

Beweis. Es sind jeweils beide Seiten der Gleichungen bilinear und symmetrisch in z und z'. Es reicht daher, sie für $z = z'$ zu zeigen. (Der allgemeine Fall folgt durch Polarisation.)

(i) $\langle J_z(x), J_z(x)\rangle = -\langle J_z^2(x), x\rangle = |z|^2|x|^2$

(ii) $J_z^2 + J_z^2 = 2J_z^2 = -2|z|^2 \,\mathrm{Id}$ □

Bemerkung. Lemma 1.5(ii) entspricht der Relation in Clifford-Algebren. Ist $\mathfrak{n}$ vom Heisenberg-Typ, so kann also J als Darstellung der Clifford-Algebra von $\mathfrak{z}$ aufgefaßt werden.

Beispiel 1.6. *Sei* $\mathfrak{v} := \mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$, $\mathfrak{z} := \mathbf{i}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ *und* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *das Standard-Skalarprodukt auf* $\mathfrak{n} \cong \mathbb{R}^{2m+1}$. *Mit der Standard-Basis* $\{x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m\}$ *von* $\mathfrak{v}$ *sei* J *durch*

$$J_{\mathbf{i}}(x_j) := y_j \quad , \quad J_{\mathbf{i}}(y_j) := -x_j \quad (1 \leq j \leq m)$$

oder, was das gleiche ist, für $x \in \mathbb{C}^m$ *durch*

$$J_{\alpha\mathbf{i}}(x) := \alpha\mathbf{i} \cdot x$$

definiert. Dann ist $\mathfrak{n}$ *vom Heisenberg-Typ. Es handelt sich um die Lie-Algebra der* Heisenberg-Gruppe H_{2m+1}.

Beispiel 1.7. *Sei* $\mathfrak{v} := \mathbb{H}^m \cong \mathbb{R}^{4m}$, $\mathfrak{z} := \mathfrak{Im}\,\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *das Standard-Skalarprodukt auf* $\mathfrak{n} \cong \mathbb{R}^{4m+3}$ *und* J *durch*

$$J_z(x) := z \cdot x$$

gegeben. Die dadurch definierte Lie-Algebra ist ebenfalls vom Heisenberg-Typ, denn für $z \in \mathfrak{Im}\,\mathbb{H}$ *gilt* $-|z|^2 = -z\bar{z} = z^2$. *Sie heißt* quaternionische Heisenberg-Algebra.

Beispiel 1.8. *Seien* $\mathfrak{v}$,$\mathfrak{z}$ *und* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *wie in Beispiel 1.7. Mit* $a+b = m$ *definieren wir die* (a,b)-modifizierte Heisenberg-Algebra $\mathfrak{n}^{(a,b)}$ *durch*

$$J_z^{(a,b)}(x_1, \ldots, x_{a+b}) := (zx_1, \ldots, zx_a, -zx_{a+1}, \ldots, -zx_{a+b})$$

für alle $z \in \mathfrak{z}$ *und* $x = (x_1, \ldots, x_{a+b}) \in \mathfrak{v}$. *Auch sie ist vom Heisenberg-Typ, und Beispiel 1.7 ist als Spezialfall* $\mathfrak{n}^{(a+b,0)}$ *enthalten.*

Wir versehen die Lie-Algebra $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$ nun mit folgendem Gruppenprodukt:

$$(x+z) \cdot (x'+z') := (x+x') + (z+z'+\tfrac{1}{2}[x,x']) \tag{1.4}$$

Die Assoziativität rechnet man sofort nach, das Inverse zu $x+z$ ist $-x-z$.

$\mathfrak{n}$ ist als Vektorraum auf natürliche Weise eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Da das Gruppenprodukt affin linear in beiden Faktoren und damit differenzierbar ist, wird $\mathfrak{n}$ so zu einer Lie-Gruppe $(\mathfrak{n}, \cdot)$. Wie üblich identifizieren wir den Tangentialraum $T_{x+z}\mathfrak{n}$ mit dem Vektorraum $\mathfrak{n}$. Wir schreiben $\partial_{x'+z'}|_{x+z}$ oder $\partial_{x'}|_{x+z} + \partial_{z'}|_{x+z}$ für den durch

$$\partial_{x'+z'}|_{x+z}(\varphi) := \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(x+z+t(x'+z'))$$

(für alle glatten $\varphi : \mathfrak{n} \to \mathbb{R}$) definierten Tangentialvektor in $T_{x+z}\mathfrak{n}$. Geht der Fußpunkt $x+z$ aus dem Zusammenhang hervor, so schreiben wir auch $\partial_{x'+z'}$ bzw. $\partial_{x'} + \partial_{z'}$.

Lemma 1.9. *Für das linksinvariante Vektorfeld X zu $\partial_{x'+z'} \in T_0\mathfrak{n}$ gilt*

$$X_{x+z} = \partial_{x'+z'} + \tfrac{1}{2}\partial_{[x,x']} \in T_{x+z}\mathfrak{n}$$

Beweis. Die Linkstranslation mit dem Gruppenelement $x + z$ sei mit L_{x+z} bezeichnet. Für jedes glatte $\varphi : \mathfrak{n} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} X_{x+z}(\varphi) &= d(L_{x+z})_0(\partial_{x'+z'}|_0)(\varphi) \\ &= \partial_{x'+z'}|_0(\varphi \circ L_{x+z}) \\ &= \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(L_{x+z}(t(x'+z'))) \\ &= \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi((x+tx') + (z + tz' + \tfrac{1}{2}[x, tx'])) \\ &= (\partial_{x'+z'}|_{x+z} + \tfrac{1}{2}\partial_{[x,x']}|_{x+z})(\varphi) \end{aligned}$$

□

Lemma 1.10. *Die Lie-Algebra der Lie-Gruppe $(\mathfrak{n}, \cdot)$ ist $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot])$.*

Beweis. Da $\mathfrak{n} \cong T_0\mathfrak{n}$ ist, bleibt nur zu zeigen, daß die Lie-Klammer $[[\cdot,\cdot]]$ von $(\mathfrak{n}, \cdot)$ unter der Identifikation $x + z \mapsto \partial_{x+z}|_0$ mit $[\cdot,\cdot]$ übereinstimmt. Seien $\partial_{x+z}, \partial_{x'+z'} \in T_0\mathfrak{n}$ und X bzw. X' die entsprechenden linksinvarianten Vektorfelder. Dann gilt mit Lemma 1.9:

$$\begin{aligned} [[\partial_{x+z}, \partial_{x'+z'}]] &= (XX' - X'X)_0 \\ &= \partial_{x+z}|_0 X' - \partial_{x'+z'}|_0 X \\ &= \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(X'_{t(x+z)} - X_{t(x'+z')}\right) \\ &= \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\partial_{x'+z'+\frac{1}{2}t[x,x']}|_{t(x+z)} - \partial_{x+z+\frac{1}{2}t[x',x]}|_{t(x'+z')}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\partial_{[x,x']}|_0 - \tfrac{1}{2}\partial_{[x',x]}|_0 \\ &= \partial_{[x,x']} = \partial_{[x+z,x'+z']} \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Nach [DK99, Theorem 1.14.3] gibt es zu jeder endlich-dimensionalen Lie-Algebra $\mathfrak{n}$ eine Lie-Gruppe N, deren Lie-Algebra $\mathfrak{n}$ ist. Das Produkt (1.4) kann daher als Konstruktion dieser Lie-Gruppenstruktur auf $\mathfrak{n}$ selber aufgefaßt werden. Ist X das linksinvariante Vektorfeld zu $\partial_{x+z} \in T_0\mathfrak{n}$ und $c(t) := t(x + z)$, so gilt nach Lemma 1.9

$$X_{c(t)} = \partial_{x+z}|_{c(t)} + \tfrac{1}{2}\partial_{[tx,x]}|_{c(t)} = \partial_{x+z}|_{c(t)} = c'(t).$$

Daher ist c Integralkurve von X und somit

$$\exp\left(\partial_{t(x+z)}|_0\right) = c(t) = t(x + z)$$

Das heißt, daß $\exp : T_0\mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ unter der Identifikation $T_0\mathfrak{n} \cong \mathfrak{n}$ die Identität auf $\mathfrak{n}$ ist. Das Gruppenprodukt (1.4) ist daher ein Spezialfall der sogenannten

Campbell-Baker-Hausdorff-Formel (siehe [DK99, 1.7.3], dort *Dynkin's formula*), die sich für zweistufig nilpotente Lie-Algebren zu

$$\exp(\partial_{x+z}) \cdot \exp(\partial_{x'+z'}) = \exp\left(\partial_{x+z} + \partial_{x'+z'} + \tfrac{1}{2}\partial_{[x,x']}\right)$$

vereinfacht.

Wir setzen das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ linksinvariant zu einer Riemannschen Metrik auf $(\mathfrak{n}, \cdot)$ fort, die wir wiederum mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnen. $\mathfrak{n}$ wird so zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Wenn es zu keinen Mißverständnissen kommen kann, wird im Folgenden sowohl die Lie-Algebra als auch die oben eingeführte Lie-Gruppe bzw. Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\mathfrak{n}$ bezeichnet.

Wir führen noch einen Satz über die Isometrie solcher Mannigfaltigkeiten an. [GW97] folgend definieren wir zunächst:

Definition 1.11. J und J' heißen *äquivalent* und wir schreiben $J \simeq J'$, wenn es Euklidische Isometrien $A: \mathfrak{v} \to \mathfrak{v}$ und $C: \mathfrak{z} \to \mathfrak{z}$ gibt, so daß

$$\forall z \in \mathfrak{z}: \ AJ_zA^{-1} = J'_{C(z)}$$

Satz 1.12 (Isometrie). *Seien die zweistufig nilpotenten Lie-Algebren $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$ wie bisher auf $\mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$ durch J bzw. J' (und das gleiche Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$) gegeben. Ist $J \simeq J'$, so sind die Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$ isometrisch vermöge $\Phi : x + z \mapsto Ax + Cz$.*

Beweis. Sei $AJ_zA^{-1} = J'_{C(z)}$ für alle $z \in \mathfrak{z}$ mit Euklidischen Isometrien A und C. Wir zeigen, daß Φ eine Isometrie $\mathfrak{n} \to \mathfrak{n}'$ ist. Nach Voraussetzung und mit (1.3) gilt für alle $z \in \mathfrak{z}$

$$\begin{aligned}\langle [Ax, Ax_1]', Cz \rangle &= \langle J'_{Cz}(Ax), Ax_1 \rangle = \langle AJ_z(x), Ax_1 \rangle \\ &= \langle J_z(x), x_1 \rangle = \langle [x, x_1], z \rangle = \langle C[x, x_1], Cz \rangle\end{aligned}$$

Also ist $[Ax, Ax_1]' = C[x, x_1]$. Mit Lemma 1.9 sieht man, daß die Linkstranslation des Vektors $\partial_{x_1+z_1}|_{x+z}$ in den Nullpunkt gerade $\partial_{x_1+z_1}|_0 - \frac{1}{2}\partial_{[x,x_1]}|_0$ ist. Folglich ist (Wir schreiben $\langle \cdot, \cdot \rangle'_p$ für die linksinvariante Metrik von $\mathfrak{n}'$ im Punkt p.)

$$\begin{aligned}\langle \partial_{Ax_1+Cz_1}, \partial_{Ax_2+Cz_2} \rangle'_{Ax+Cz} &= \left\langle Ax_1 + Cz_1 - \tfrac{1}{2}[Ax, Ax_1]', Ax_2 + Cz_2 - \tfrac{1}{2}[Ax, Ax_2]' \right\rangle \\ &= \langle x_1, x_2 \rangle + \left\langle z_1 - \tfrac{1}{2}[x, x_1], z_2 - \tfrac{1}{2}[x, x_2] \right\rangle \\ &= \langle \partial_{x_1+z_1}, \partial_{x_2+z_2} \rangle_{x+z}\end{aligned}$$

und somit Φ eine Isometrie. □

Bemerkung. Es gilt auch umgekehrt $J \simeq J'$ wenn $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$ isometrisch sind. (Zum Beweis vgl. [GW97].) Als einfache Anwendung des Satzes sieht man, daß die Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{n}^{(a,b)}$ und $\mathfrak{n}^{(b,a)}$ aus Beispiel 1.8 isometrisch sind. (Setze $A := \mathrm{Id}$, $C := -\mathrm{Id}$. Dann vertauscht Φ lediglich die beiden Summanden in $\mathfrak{v} = \mathbb{H}^a \oplus \mathbb{H}^b$.). Mit der Umkehrung des Satzes kann man zeigen, daß ansonsten die $\mathfrak{n}^{(a,b)}$ für festes $a+b=m$ paarweise lokal nicht-isometrisch sind (vgl. [Sza01, Theorem 2.1]).

1.3 Der Laplace-Operator auf zweistufig nilpotenten Lie-Algebren

Für linksinvariante Vektorfelder X, Y, Z auf einer Lie-Gruppen mit linksinvarianter Metrik gilt $X\langle Y, Z\rangle = 0$, und die Koszul-Formel für den Levi-Civita-Zusammenhang (vgl. z.B. [ONe83, 3.11]) vereinfacht sich daher wie folgt:

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \tfrac{1}{2}\big(\, \langle X, [Z,Y]\rangle + \langle Y, [Z,X]\rangle + \langle Z, [X,Y]\rangle \,\big)$$

Wir wollen linksinvariante Vektorfelder durch Elemente von $T_0\mathfrak{n} \cong \mathfrak{n}$ repräsentieren. Dann gilt mit Lemma 1.10 und (1.3)

$$\begin{aligned}
\Big\langle \nabla_{x+z}(x'+z'),\ x''+z'' \Big\rangle &= \tfrac{1}{2}\big(\, \langle x+z, [x''+z'', x'+z']\rangle \\
&\qquad + \langle x'+z', [x''+z'', x+z]\rangle \\
&\qquad + \langle x''+z'', [x+z, x'+z']\rangle \,\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(\, \langle z, [x'', x']\rangle + \langle z', [x'', x]\rangle + \langle z'', [x, x']\rangle \,\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(\, \langle [x,x'], z''\rangle - \langle J_z(x'), x''\rangle - \langle J_{z'}(x), x''\rangle \,\big) \\
&= \Big\langle \tfrac{1}{2}\big([x,x'] - J_z(x') - J_{z'}(x)\big),\ x''+z'' \Big\rangle
\end{aligned}$$

und daher

$$\nabla_{x+z}(x'+z') = \tfrac{1}{2}\big([x,x'] - J_z(x') - J_{z'}(x)\big) \tag{1.5}$$

Wir wählen Orthonormalbasen $\{e_1, \ldots, e_k\}$ von $\mathfrak{v}$ und $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_l\}$ von $\mathfrak{z}$. Zur besseren Übersicht werden im Folgenden lateinische Indizes für die e_i $(1 \le i \le k)$ und griechische für die $\tilde{e}_\alpha$ $(1 \le \alpha \le l)$ verwendet. Die linksinvarianten Vektorfelder zu $\partial_{e_i}|_0$ und $\partial_{\tilde{e}_\alpha}|_0$ seien mit E_i bzw. $\tilde{E}_\alpha$ bezeichnet. Für sie gilt nach Lemma 1.9 $(E_i)_{x+z} = \partial_{e_i}|_{x+z} + \frac{1}{2}\partial_{[x,e_i]}|_{x+z}$ und $(\tilde{E}_\alpha)_{x+z} =$

$\partial_{\tilde{e}_\alpha}|_{x+z} + \frac{1}{2}\partial_{[x,0]}|_{x+z}$, also mit (1.3)

$$(E_i)_{x+z} = \partial_i + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{l} \langle J_\alpha(x), e_i\rangle \, \partial_\alpha \tag{1.6}$$

$$(\tilde{E}_\alpha)_{x+z} = \partial_\alpha \tag{1.7}$$

wobei wir abkürzend $\partial_i := \partial_{e_i}$, $\partial_\alpha := \partial_{\tilde{e}_\alpha}$ und $J_\alpha := J_{\tilde{e}_\alpha}$ setzen. Da es sich bei ∂_i und ∂_α um die Koordinatenvektorfelder zu den durch die Basis $(e_1, \ldots, e_k, \tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_l)$ kanonisch induzierten Koordinaten der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{n}$ handelt, kommutieren ∂_i und ∂_α für alle i und α.

Satz 1.13 (Laplace-Operator). *Seien $\Delta_\mathfrak{v}$ und $\Delta_\mathfrak{z}$ die Laplace-Operatoren auf den Euklidischen Vektorräumen $\mathfrak{v}$ bzw. $\mathfrak{z}$. Für den Laplace-Operator Δ von $\mathfrak{n}$ gilt im Punkt $x+z \in \mathfrak{n}$*

$$\Delta = \Delta_\mathfrak{v} + \Delta_\mathfrak{z} - \frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta=1}^{l} \langle J_\alpha(x), J_\beta(x)\rangle \, \partial_\alpha\partial_\beta - \sum_{\alpha=1}^{l} \partial_\alpha D_\alpha$$

wobei D_α die Ableitung nach dem Vektorfeld $(x,z) \mapsto J_\alpha(x)$ bezeichnet. Ist $\mathfrak{n}$ vom Heisenberg-Typ, so gilt

$$\Delta = \Delta_\mathfrak{v} + \left(1 + \frac{|x|^2}{4}\right)\Delta_\mathfrak{z} - \sum_{\alpha=1}^{l} \partial_\alpha D_\alpha$$

Beweis. Nach (1.2) und (1.5) gilt

$$\begin{aligned}
\Delta &= -\sum_{i=1}^{k}\big((E_i)^2_{x+z} - (\nabla_{E_i}E_i)_{x+z}\big) - \sum_{\alpha=1}^{l}\Big((\tilde{E}_\alpha)^2_{x+z} - (\nabla_{\tilde{E}_\alpha}\tilde{E}_\alpha)_{x+z}\Big) \\
&= -\sum_{i=1}^{k}(E_i)^2_{x+z} - \sum_{\alpha=1}^{l}(\tilde{E}_\alpha)^2_{x+z}
\end{aligned}$$

Nach (1.6) ist aber

$$\begin{aligned}
(E_i)^2_{x+z} &= \left(\partial_i + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{l}\langle J_\alpha(x), e_i\rangle \, \partial_\alpha\right)^2 \\
&= \partial_i^2 + \frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta=1}^{l}\langle J_\alpha(x), e_i\rangle \, \partial_\alpha \langle J_\beta(x), e_i\rangle \, \partial_\beta \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{l}\big(\partial_i \langle J_\alpha(x), e_i\rangle \, \partial_\alpha + \langle J_\alpha(x), e_i\rangle \, \partial_\alpha\partial_i\big)
\end{aligned}$$

Da die Terme $\langle J_\alpha(x), e_i\rangle$ und $\langle J_\beta(x), e_i\rangle$ nicht von z abhängen, kommutieren sie mit ∂_α. Wegen $\langle J_\alpha(x), e_i\rangle = \langle [x, e_i], \tilde{e}_\alpha\rangle$ hängt dieser Term nicht von der e_i-Koordinate ab, kommutiert also mit ∂_i. Schließlich kommutieren ∂_i und ∂_α als Koordinaten-Vektorfelder wie oben bemerkt. Zusammen mit (1.7) erhalten wir also

$$\begin{aligned}\Delta = &-\sum_{i=1}^{k} \partial_i^2 - \sum_{\alpha=1}^{l} \partial_\alpha^2 - \frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{k}\langle J_\alpha(x), e_i\rangle \langle J_\beta(x), e_i\rangle\right)\partial_\alpha\partial_\beta \\ &-\sum_{\alpha=1}^{l}\partial_\alpha\left(\sum_{i=1}^{k}\langle J_\alpha(x), e_i\rangle\,\partial_i\right) \\ = &\ \Delta_{\mathfrak{v}} + \Delta_{\mathfrak{z}} - \frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta=1}^{l}\langle J_\alpha(x), J_\beta(x)\rangle\,\partial_\alpha\partial_\beta - \sum_{\alpha=1}^{l}\partial_\alpha D_\alpha\end{aligned}$$

Ist $\mathfrak{n}$ vom Heisenberg-Typ, so ist nach Lemma 1.5(i)

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{l}\langle J_\alpha(x), J_\beta(x)\rangle\,\partial_\alpha\partial_\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{l}\langle \tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_\beta\rangle\,|x|^2\partial_\alpha\partial_\beta = \sum_{\alpha=1}^{l}|x|^2\partial_\alpha^2 = -|x|^2\Delta_{\mathfrak{z}}$$

und die Aussage folgt. $\square$

Kapitel 2

Ansatz und Fehler des Isospektralitäts-Beweises

In [Sza01] soll die Isospektralität von bestimmten Gebieten in zweistufig nilpotenten Lie-Algebren $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$ gezeigt werden. Der dort angeführte sogenannte Ball×Torus-Typ wurde auch in [Mar05] untersucht und auf die in [Bal04] vorgestellte Methode zurückgeführt, was allerdings für den sogenannten Ball-Typ bisher nicht gelang. In diesem Kapitel soll dargestellt werden, wie in [Sza01] versucht wird, die Isospektralität für den Ball-Typ zu beweisen, und an welchen Stellen dieser Beweisgang fehlerhaft ist.

2.1 Definition der Gebiete und Reduktion

Sei wie in Abschnitt 1.2 eine zweistufig nilpotente Lie-Algebra $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$ durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $J : \mathfrak{z} \to \mathfrak{so}(\mathfrak{v})$ gegeben. Sei weiterhin $\sigma : \mathfrak{v} \to \mathfrak{v}$ eine orthogonale Involution, die für alle $z \in \mathfrak{z}$ mit J_z kommutiert, und sei $\mathfrak{n}' = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$ durch $J'_z := \sigma \circ J_z$ (und das gleiche Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$) gegeben. Die Lie-Klammer von $\mathfrak{n}'$ soll mit $[\cdot, \cdot]'$, die linksinvariante Metrik mit $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ bezeichnet werden. Seien ferner $k := \dim \mathfrak{v}$ und $l := \dim \mathfrak{z}$. Für eine Funktion $\rho : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$B_\rho := \{x + z \in \mathfrak{n} \quad ; \; |x| \leq \rho(|z|)\}$$

und analog $B'_\rho \subset \mathfrak{n}'$. Wir wollen nur solche ρ betrachten, so daß B_ρ diffeomorph zu einem $(k + l)$-dimensionalen Ball ist. Das kanonische Beispiel für ρ ist der Ball in $\mathfrak{n}$, der durch

$$\rho(\zeta) := \begin{cases} \sqrt{1 - \zeta^2} & \text{für} \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \\ \text{negativ} & \text{für} \quad \zeta > 1 \end{cases}$$

beschrieben wird. Aber auch viele andere Funktionen ρ führen zu Gebieten der gewünschten Art (d.h. insbesondere zu einem glatten Rand). So wird z.B. durch

$$\rho(\zeta) := \begin{cases} \sqrt{1-\frac{\zeta^2}{\alpha^2}} & \text{für} \quad 0 \leq \zeta \leq \alpha \\ \text{negativ} & \text{für} \quad \zeta > \alpha \end{cases}$$

ein (Voll-)Ellipsoid beschrieben, das aus dem vorhergehenden Beispiel durch eine Streckung mit $\alpha > 0$ in allen $\mathfrak{z}$-Richtungen hervorgeht.

Im Rahmen des Ball-Typs soll in [Sza01] nun die Isospektralität der Untermannigfaltigkeiten B_ρ und B'_ρ bewiesen werden, unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß ein sogenannter Einheits-Antikommutator existiert, d.h. ein $J_{z_0} \neq 0$ (für ein $z_0 \in \mathfrak{z}$), so daß $J_{z_0} \circ J_z = -J_z \circ J_{z_0}$ für alle $z \perp z_0$ und $J_{z_0}^2 = -\operatorname{Id}$.

Als besondere Beispiele für den Ball-Typ werden die Gebiete $B_\rho^{(a,b)}$ bzw. $B_\rho^{(a',b')}$ in den (in Beispiel 1.8 beschriebenen) modifizierten Heisenberg-Algebren $\mathfrak{n}^{(a,b)}$ und $\mathfrak{n}^{(a',b')}$ mit $a+b = a'+b'$ und $\{a,b\} \neq \{a',b'\}$ betrachtet. Diese Algebren sind von der obigen Form, wenn man

$$\sigma(x_1, \ldots, x_{a+b}) := (x_1, \ldots, x_a, -x_{a+1}, \ldots, -x_{a'}, x_{a'+1}, \ldots, x_{a+b})$$

setzt. (Ohne Einschränkung sei $a' > a$ angenommen.) Die Antikommutator-Bedingung erfüllen sie stets, da in Algebren vom Heisenberg-Typ wegen Lemma 1.5(ii) jedes J_z mit $|z| = 1$ Einheits-Antikommutator ist.

Es soll nun ein Reduktionssatz vorgestellt werden, der es uns erlaubt, statt der Lie-Algebra n' eine isometrische Lie-Algebra n^* zu betrachten. Diese wird durch eine Abbildung J^* gegeben sein, die sich im Gegensatz zu J' von J nur auf dem eindimensionalen Unterraum von $\mathfrak{z}$ unterscheidet, der von einem fest gewählten Einheits-Antikommutator aufgespannt wird.

Satz 2.1 (Reduktion). *Sei $\mathfrak{n}$ durch J gegeben und J_{z_0} Einheits-Antikommutator. Sei ferner $\mathfrak{n}'$ wie oben durch $J' := \sigma \circ J$ gegeben und $\mathfrak{n}^*$ durch J^* mit*

$$J_z^* := \begin{cases} J'_z & \textit{für} \quad z \sim z_0 \\ J_z & \textit{für} \quad z \perp z_0 \end{cases}$$

(und linear fortgesetzt). Dann sind $\mathfrak{n}'$ und $\mathfrak{n}^*$ isometrisch.

Beweis. Da σ eine orthogonale Involution ist, zerfällt $\mathfrak{v}$ in die Eigenräume $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ zu den Eigenwerten $+1$ und -1 von σ. Da σ mit den J_z kommutiert, sind $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ invariant unter allen J_z. Sei nun $A := \operatorname{Id}|_{\mathfrak{v}_1} \oplus J_{z_0}|_{\mathfrak{v}_2} : \mathfrak{v} \to \mathfrak{v}$. Dann ist A eine Euklidische Isometrie von $\mathfrak{v}$, und nach Satz 1.12 reicht es zu zeigen, daß für alle $z \in \mathfrak{z}$

$$AJ'_zA^{-1} = J_z^*$$

Wir betrachten die Fälle $z \sim z_0$ und $z \perp z_0$ getrennt. Sei zunächst $z = \lambda z_0$. Auf $\mathfrak{v}_1$ ist die Gleichung trivial erfüllt, und auf $\mathfrak{v}_2$ gilt

$$AJ'_z A^{-1} = J_{z_0} \circ (\sigma \circ \lambda J_{z_0}) \circ J_{z_0}^{-1} = J'_z = J^*_z$$

Ist andererseits $z \perp z_0$, so gilt auf $\mathfrak{v}_1$ wegen $\sigma|_{\mathfrak{v}_1} = \mathrm{Id}$

$$AJ'_z A^{-1} = \sigma \circ J_z = J_z = J^*_z$$

und auf $\mathfrak{v}_2$ wegen $\sigma|_{\mathfrak{v}_2} = -\mathrm{Id}$ und der Antikommutator-Eigenschaft

$$AJ'_z A^{-1} = J_{z_0} \circ (\sigma \circ J_z) \circ J_{z_0}^{-1} = -\sigma \circ J_z \circ J_{z_0} \circ J_{z_0}^{-1} = J_z = J^*_z \qquad \square$$

Wir können nun analog zu B_ρ und B'_ρ auch das Gebiet $B^*_\rho \subset \mathfrak{n}^*$ betrachten. Die Isometrie aus Satz 2.1 läßt sich zu einer Isometrie der Untermannigfaltigkeiten B'_ρ und B^*_ρ einschränken (vgl. Satz 1.12). Wir haben die Frage der Isospektralität von B_ρ und B'_ρ also auf die der Isospektralität von B_ρ und B^*_ρ reduziert. Dabei bleibe der Einheits-Antikommutator J_{z_0} im Folgenden fest gewählt.

2.2 Die Polynome $\Theta^{p,q}(x,y)$

Wir betrachten nun den komplexifizierten Vektorraum $\mathfrak{v}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{v} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ und setzen die J_z komplex-linear sowie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ komplex-bilinear darauf fort. Für $x \in \mathfrak{v}_{\mathbb{C}}$ schreiben wir $\lambda_x := \langle x, \cdot \rangle$. Der Raum der homogenen, komplexwertigen Polynome auf $\mathfrak{v}$ vom Grad s wird von den Monomen $\lambda_{x_1} \cdots \lambda_{x_s}$ mit $x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{v}_{\mathbb{C}}$ aufgespannt und soll mit $\tilde{P}^s$ bezeichnet werden. Sei S die Einheitssphäre in $\mathfrak{v}$. Dann bezeichne P^s den Raum der auf S eingeschränkten Polynome aus $\tilde{P}^s$.

Wegen $J_{z_0}^2 = -\mathrm{Id}$ handelt es sich bei dem Einheits-Antikommutator um eine orthogonale komplexe Struktur auf dem Vektorraum $\mathfrak{v}$. Wir definieren die üblichen Einbettungen $\mathfrak{v} \hookrightarrow \mathfrak{v}_{\mathbb{C}}$:

Definition 2.2. Für $x \in \mathfrak{v}$ seien $x', x'' \in \mathfrak{v}_{\mathbb{C}}$ definiert durch

$$x' := \tfrac{1}{2}(x - \mathbf{i} J_{z_0}(x))$$
$$x'' := \tfrac{1}{2}(x + \mathbf{i} J_{z_0}(x))$$

Die von den Bildern x' bzw. x'' aufgespannten Unterräume von $\mathfrak{v}_{\mathbb{C}}$ werden mit $\mathfrak{v}'$ bzw. $\mathfrak{v}''$ bezeichnet.

Einige elementare Eigenschaften sind im folgenden Lemma zusammengefaßt:

Lemma 2.3. *Sei* $x, y \in \mathfrak{v}$.

(i) Es gilt $\mathfrak{v}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{v}' \oplus \mathfrak{v}''$. $\mathfrak{v}'$ *und* $\mathfrak{v}''$ *sind die Eigenräume von* J_{z_0} *zu den Eigenwerten* $+\mathbf{i}$ *bzw.* $-\mathbf{i}$.

(ii) $\langle x', y' \rangle = \langle x'', y'' \rangle = 0$

(iii) $\langle x', y'' \rangle = \frac{1}{2} \langle x, y \rangle + \frac{\mathbf{i}}{2} \langle x, J_{z_0}(y) \rangle$

Beweis.

(i) Es gilt
$J_{z_0}(x') = \frac{1}{2} J_{z_0}(x - \mathbf{i} J_{z_0}(x)) = \frac{1}{2}(J_{z_0}(x) + \mathbf{i}x) = \mathbf{i}\left[\frac{1}{2}(x - \mathbf{i}J_{z_0}(x))\right] = \mathbf{i}x'$
und analog $J_{z_0}(x'') = -\mathbf{i}x''$. Also sind $\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{v}''$ in den entsprechenden Eigenräumen enthalten. Die Aussage folgt, da sich jedes $x + \mathbf{i}y \in \mathfrak{v}_{\mathbb{C}}$ mit $x, y \in \mathfrak{v}$ schreiben läßt als $x + \mathbf{i}y = (x' + x'') + (J_{z_0}(y)' - J_{z_0}(y)'') \in \mathfrak{v}' \oplus \mathfrak{v}''$.

(ii) $$\begin{aligned} 4\langle x', y' \rangle &= \langle x - \mathbf{i}J_{z_0}(x), y - \mathbf{i}J_{z_0}(y) \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - \langle J_{z_0}(x), J_{z_0}(y) \rangle - \mathbf{i}\langle J_{z_0}(x), y \rangle - \mathbf{i}\langle x, J_{z_0}(y) \rangle = 0 \end{aligned}$$
und analog für die andere Gleichung.

(iii) $$\begin{aligned} 4\langle x', y'' \rangle &= \langle x - \mathbf{i}J_{z_0}(x), y + \mathbf{i}J_{z_0}(y) \rangle \\ &= \langle x, y \rangle + \langle J_{z_0}(x), J_{z_0}(y) \rangle + \mathbf{i}\langle x, J_{z_0}(y) \rangle - \mathbf{i}\langle J_{z_0}(x), y \rangle \\ &= 2\langle x, y \rangle + 2\mathbf{i}\langle x, J_{z_0}(y) \rangle \end{aligned}$$ □

Wir definieren nun speziellere Polynome in $\tilde{P}^s$:

Definition 2.4. Seien $x, y \in \mathfrak{v}$. Dann definieren wir $\tilde{\Theta}^{p,q}(x, y) \in \tilde{P}^{p+q}$ durch

$$\tilde{\Theta}^{p,q}(x, y) := \lambda_{x'}^p \lambda_{y''}^q = \langle x', \cdot \rangle^p \langle y'', \cdot \rangle^q$$

Den Unterraum von $\tilde{P}^{p+q}$, der durch diese $\tilde{\Theta}^{p,q}(x, y)$ mit $x, y \in \mathfrak{v}$ und festem p und q aufgespannt wird, bezeichnen wir mit $\tilde{P}^{p,q}$. Die entsprechenden Einschränkungen auf die Einheitssphäre S bezeichnen wir mit $\Theta^{p,q}(x, y)$ bzw. $P^{p,q}$.

Wir untersuchen zunächst, wie sich die $\tilde{\Theta}^{p,q}(x, y)$ unter dem Laplace-Operator $\Delta_{\mathfrak{v}}$ (ebenfalls fortgesetzt auf komplexwertige Funktionen) verhalten:

Lemma 2.5. $\Delta_{\mathfrak{v}}\left(\tilde{\Theta}^{p,q}(x, y)\right) = -2pq \langle x', y'' \rangle \tilde{\Theta}^{p-1,q-1}(x, y)$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathfrak{v}}\left(\tilde{\Theta}^{p,q}(x,y)\right) &= -\sum_{i=1}^{k} \partial_i^2 \left(\lambda_{x'}^p \lambda_{y''}^q\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{k} \partial_i \left(p \left\langle x', e_i\right\rangle \lambda_{x'}^{p-1}\lambda_{y''}^q + q \left\langle y'', e_i\right\rangle \lambda_{x'}^p \lambda_{y''}^{q-1}\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{k} \Bigg(p(p-1) \left\langle x', e_i\right\rangle^2 \lambda_{x'}^{p-2}\lambda_{y''}^q + q(q-1)\left\langle y'', e_i\right\rangle^2 \lambda_{x'}^p \lambda_{y''}^{q-2} \\
&\qquad\qquad + 2pq \left\langle x', e_i\right\rangle \left\langle y'', e_i\right\rangle \lambda_{x'}^{p-1}\lambda_{y''}^{q-1}\Bigg) \\
&= -p(p-1)\left\langle x', x'\right\rangle \lambda_{x'}^{p-2}\lambda_{y''}^q - q(q-1)\left\langle y'', y''\right\rangle \lambda_{x'}^p\lambda_{y''}^{q-2} \\
&\quad - 2pq \left\langle x', y''\right\rangle \lambda_{x'}^{p-1}\lambda_{y''}^{q-1}
\end{aligned}$$

Da nach Lemma 2.3(ii) die ersten beiden Terme verschwinden, folgt die Behauptung. □

Wir betrachten nun D_z, den Operator der Ableitung nach dem Vektorfeld $x \mapsto J_z(x)$. Da stets $x \perp J_z(x)$ gilt, ist dieses Vektorfeld tangential an S. Daher ist D_z auch auf P^s definiert.

Lemma 2.6. *Für $x \in \mathfrak{v}_{\mathbb{C}}$ und $z \in \mathfrak{z}$ gilt*

$$D_z\left(\lambda_x^n\right) = -n\lambda_x^{n-1}\lambda_{J_z(x)}$$

und damit speziell für $n = 1$

$$D_z\left(\lambda_x\right) = -\lambda_{J_z(x)}$$

Beweis. Man rechnet für $y \in \mathfrak{v}$ direkt nach:

$$\begin{aligned}
D_z(\lambda_x^n)(y) &= \partial_{J_z(y)}|_y(\lambda_x^n) = n\lambda_x^{n-1}(y)\partial_{J_z(y)}|_y(\lambda_x) \\
&= n\lambda_x^{n-1}(y)\left\langle x, J_z(y)\right\rangle = \left(-n\lambda_x^{n-1}\lambda_{J_z(x)}\right)(y)
\end{aligned}$$ □

Lemma 2.7. *Die $\Theta^{p,q}(x,y)$ sind Eigenfunktionen von D_{z_0}, dem zu der fest gewählten komplexen Struktur J_{z_0} gehörenden Ableitungs-Operator. Es gilt*

$$D_{z_0}\big(\Theta^{p,q}(x,y)\big) = \mathbf{i}(q-p)\Theta^{p,q}(x,y)$$

Beweis. Mit Lemma 2.6 und Lemma 2.3(i) erhält man

$$\begin{aligned}
D_{z_0}\big(\Theta^{p,q}(x,y)\big) &= pD_{z_0}(\lambda_{x'})\lambda_{x'}^{p-1}\lambda_{y''}^q + qD_{z_0}(\lambda_{y''})\lambda_{x'}^p\lambda_{y''}^{q-1} \\
&= -p\lambda_{J_{z_0}(x')}\lambda_{x'}^{p-1}\lambda_{y''}^q - q\lambda_{J_{z_0}(y'')}\lambda_{x'}^p\lambda_{y''}^{q-1} \\
&= -\mathbf{i}p\lambda_{x'}^p\lambda_{y''}^q + \mathbf{i}q\lambda_{x'}^p\lambda_{y''}^q \\
&= \mathbf{i}(q-p)\Theta^{p,q}(x,y)
\end{aligned}$$ □

Nun können wir sehen, daß der Raum P^s in die Räume $P^{p,q}$ zerfällt:

Satz 2.8. *Für alle $s \geq 0$ gilt*

$$P^s = \bigoplus_{p=0}^{s} P^{p,s-p}$$

Beweis. Da die $P^{p,s-p}$ nach Lemma 2.7 in den Eigenräumen von D_{z_0} zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\mathbf{i}(s-2p)$ enthalten sind, ist die Summe direkt.

Es bleibt zu zeigen, daß sich jedes Polynom in $\tilde{P}^s$ als Summe von geeigneten $\tilde{\Theta}^{p,q}(x,y)$ mit $p+q=s$ schreiben läßt, denn dann gilt dies auch für P^s und $\Theta^{p,q}(x,y)$. Es genügt, Monome $\lambda_{x_1}\cdots\lambda_{x_s}$ zu betrachten. Dann gilt aber

$$\begin{aligned}\lambda_{x_1}\cdots\lambda_{x_s} &= (\lambda_{x_1'}+\lambda_{x_1''})\cdots(\lambda_{x_s'}+\lambda_{x_s''})\\ &= \sum_{p=0}^{s}\sum_{j=1}^{\binom{s}{p}}(\lambda_{x'_{p,j,1}}\cdots\lambda_{x'_{p,j,p}})(\lambda_{x''_{p,j,p+1}}\cdots\lambda_{x''_{p,j,s}})\end{aligned}$$

mit geeigneten $x_{p,j,\mu}$. (Es wird zunächst über die jeweils $\binom{s}{p}$ Terme mit genau p Faktoren der Form $\lambda_{x_i'}$ und dann über alle p summiert.) Nun ist aber $\lambda_{x'_{p,j,1}}\cdots\lambda_{x'_{p,j,p}}$ ein homogenes Polynom vom Grad p auf dem Vektorraum $\mathfrak{v}' \subset \mathfrak{v}_{\mathbb{C}}$ und $\lambda_{x''_{p,j,p+1}}\cdots\lambda_{x''_{p,j,s}}$ ein homogenes Polynom vom Grad q auf $\mathfrak{v}''$. Da sich jedes homogene Polynom vom Grad p als Summe von p-ten Potenzen schreiben läßt (siehe Satz A.1), gilt daher mit geeigneten $y_{p,j,\mu}, \tilde{y}_{p,j,\nu} \in \mathfrak{v}$

$$\begin{aligned}(\lambda_{x'_{p,j,1}}\cdots\lambda_{x'_{p,j,p}})(\lambda_{x''_{p,j,p+1}}\cdots\lambda_{x''_{p,j,s}}) &= \left(\sum_{\mu}\lambda^p_{y'_{p,j,\mu}}\right)\left(\sum_{\nu}\lambda^q_{\tilde{y}''_{p,j,\nu}}\right)\\ &= \sum_{\mu,\nu}\tilde{\Theta}^{p,q}(y_{p,j,\mu},\tilde{y}_{p,j,\nu})\end{aligned}$$

Daher läßt sich insgesamt auch $\lambda_{x_1}\cdots\lambda_{x_s}$ als Summe von Termen der Form $\tilde{\Theta}^{p,q}(x,y)$ mit $x,y\in\mathfrak{v}$ schreiben, was zu zeigen war. □

2.3 Die harmonischen Projektionen h_s

Sei $\tilde{H}^s \subset \tilde{P}^s$ der Raum der harmonischen, homogenen Polynome vom Grad s, also der Kern des euklidischen Laplace-Operators $\Delta_{\mathfrak{v}}$ auf $\tilde{P}^s$. Sei ferner H^s der Raum der auf die Einheitssphäre S eingeschränkten Funktionen aus $\tilde{H}^s$. Wie z.B. in [GHL90, Chapter IV.E] ausgeführt, ist H^s der Eigenraum des sphärischen Laplace-Operators Δ_S zum Eigenwert $s(s+k-2)$. Dort (Lemma 4.50) wird auch dargestellt, daß

$$\tilde{P}^s = \bigoplus_{i=0}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} r^{2i} \tilde{H}^{s-2i} \quad \text{und} \quad P^s = \bigoplus_{i=0}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} H^{s-2i} \tag{2.1}$$

wobei r die Radiusfunktion auf $\mathfrak{v}$ ist. (Für eine Orthonormalbasis $\{e_1, \dots, e_k\}$ von $\mathfrak{v}$ ist $r = \sum_{i=1}^k \lambda_{e_i}^2$.) Die Projektionen auf den jeweils ersten Summanden ($i = 0$) dieser Summen seien mit $\tilde{h}_s$ bzw. h_s bezeichnet. In dem folgenden Diagramm sind die senkrechten Pfeile die Einschränkungen auf S:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{P}^s & \xrightarrow{\tilde{h}_s} & \tilde{H}^s \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ P^s & \xrightarrow{h_s} & H^s \end{array} \tag{2.2}$$

Es kommutiert, da es trivialerweise auf jedem Summanden von $\tilde{P}^s$ kommutiert. Wir wollen nun das Bild von $\Theta^{p,q}(x,y)$ unter h_s bestimmen. Wir geben damit eine explizite Form des Ergebnisses von [Sza01, S. 460].

Satz 2.9 (Harmonische Projektion). *Sei $p+q=s$ und $x, y \in \mathfrak{v}$ gegeben. Dann ist*

$$h_s\big(\Theta^{p,q}(x,y)\big) = \Theta^{p,q}(x,y) + \sum_{j=1}^{\min\{p,q\}} A_j \Theta^{p-j,q-j}(x,y)$$

mit

$$A_j := \frac{[p]_j [q]_j \left\langle x', y'' \right\rangle^j}{(-2)^j j! [\lambda - 2]_j}$$

wobei $[x]_j := x(x-1)\cdots(x-j+1)$ das faktorielle Polynom ist.

Beweis. Wir definieren Operatoren X, Y und H auf $\mathfrak{P} := \bigoplus_{s=0}^\infty \tilde{P}^s$ durch

$$X := \frac{1}{2} r^2, \quad Y := \frac{1}{2} \Delta_{\mathfrak{v}} \quad \text{und} \quad H := [X, Y]$$

Wir wollen zeigen, daß (X, Y, H) eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2$ auf $\mathfrak{P}$ ist. Zunächst bestimmen wir H genauer. Mit einer Orthonormalbasis $\{e_1, \dots, e_k\}$ von $\mathfrak{v}$ kann jedes Polynom als Linearkombination von Monomen der Form $P = \lambda_{e_1}^{\nu_1} \cdots \lambda_{e_k}^{\nu_k}$ geschrieben werden. Für solche Monome gilt

$$
\begin{aligned}
H(P) = [X,Y](P) &= \frac{1}{4}r^2(\Delta_{\mathfrak{v}}P) - \frac{1}{4}\Delta_{\mathfrak{v}}(r^2P) \\
&= -\frac{1}{4}r^2\left(\sum_{i=1}^{k}\nu_i(\nu_i-1)\lambda_{e_1}^{\nu_1}\cdots\lambda_{e_i}^{\nu_i-2}\cdots\lambda_{e_k}^{\nu_k}\right) - \frac{1}{4}\Delta_{\mathfrak{v}}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_{e_1}^{\nu_1}\cdots\lambda_{e_i}^{\nu_i+2}\cdots\lambda_{e_k}^{\nu_k}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k}\left(\nu_i(\nu_i-1)P + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\nu_i(\nu_i-1)\lambda_{e_1}^{\nu_1}\cdots\lambda_{e_j}^{\nu_j+2}\cdots\lambda_{e_i}^{\nu_i-2}\cdots\lambda_{e_k}^{\nu_k}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k}\left((\nu_i+2)(\nu_i+1)P + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\nu_j(\nu_j-1)\lambda_{e_1}^{\nu_1}\cdots\lambda_{e_j}^{\nu_j-2}\cdots\lambda_{e_i}^{\nu_i+2}\cdots\lambda_{e_k}^{\nu_k}\right)
\end{aligned}
$$

und da die inneren Summen durch Umnumerieren wegfallen

$$
\begin{aligned}
H(P) &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k}\Big((\nu_i+2)(\nu_i+1) - \nu_i(\nu_i-1)\Big)P \\
&= \sum_{i=1}^{k}\left(\nu_i + \tfrac{1}{2}\right)P \\
&= \left(\deg(P) + \tfrac{k}{2}\right)P
\end{aligned}
$$

Damit gilt nun

$$
\begin{aligned}
[X,H](P) &= \tfrac{1}{2}r^2(\deg(P)+\tfrac{k}{2})P - \tfrac{1}{2}(\deg(r^2P)+\tfrac{k}{2})r^2P \\
&= \tfrac{1}{2}r^2\left(\deg(P) - \deg(r^2P)\right)P = -r^2P = -2X(P)
\end{aligned}
$$

und ganz ähnlich $[Y,H](P) = 2Y(P)$. Daher ist (X,Y,H) in der Tat eine $\mathfrak{sl}_2$-Darstellung.

Da $\tilde{\Theta}^{p,q}(x,y)$ homogen ist, ist es Eigenfunktion von H zum Eigenwert $\lambda = s + \frac{k}{2}$. Setze $m := \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$. Dann ist $2(m+1) > s = \deg(P)$, also $Y^{m+1}\big(\tilde{\Theta}^{p,q}(x,y)\big) = 0$, und $\lambda > s \geq 2m$. Daher gilt nach Satz A.2

$$
\tilde{\Theta}^{p,q}(x,y) = \tilde{h}_0 + X^2\tilde{h}_1 + \cdots + X^{2m}\tilde{h}_m \tag{2.3}
$$

mit

$$
\ker(\Delta_{\mathfrak{v}}) \ni \tilde{h}_n = \frac{1}{n![-\lambda+2n]_n}\sum_{j=0}^{m-n}\frac{1}{2^{n+2j}j![\lambda-2n-2]_j}r^{2j}\Delta_{\mathfrak{v}}^{n+j}\left(\tilde{\Theta}^{p,q}(x,y)\right)
$$

wobei $[x]_j := x(x-1)\cdots(x-j+1)$. Mit der Kommutativität von (2.2) und da (2.3) der Zerlegung aus (2.1) entspricht, erhalten wir

$$h_s\Big(\Theta^{p,q}(x,y)\Big) = \tilde{h}_s\Big(\tilde{\Theta}^{p,q}(x,y)\Big)\Big|_S = \tilde{h}_0\Big|_S$$

und daher mit Lemma 2.5 (beachte $r=1$ auf S)

$$\begin{aligned} h_s\Big(\Theta^{p,q}(x,y)\Big) &= \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{2^{2j} j! [\lambda-2]_j}\ \Delta_{\mathfrak{v}}^j \Big(\tilde{\Theta}^{p,q}(x,y)\Big)\Big|_S \\ &= \sum_{j=0}^{\min\{p,q\}} \frac{1}{2^{2j} j! [\lambda-2]_j} [p]_j [q]_j \left(-2\left\langle x', y''\right\rangle\right)^j \Theta^{p-j,q-j}(x,y) \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Lemma 2.10. *Für alle $z \in \mathfrak{z}$ kommutieren Δ_S und D_z. Damit kommutieren auch h_s und D_z für alle $s \geq 0$.*

Beweis. Für $x \in S$ definieren wir $\varphi_t : S \to S$ durch

$$\varphi_t(x) := \cos t \cdot x + \sin t \cdot J_z(x)$$

Dann gilt für $v \in T_x S$

$$(\varphi_t)_*(v) = \cos t \cdot v + \sin t \cdot J_z(v) \in T_{\varphi_t(x)} S$$

und φ_t ist eine Isometrie, denn

$$\begin{aligned} \Big\langle (\varphi_t)_*(v), (\varphi_t)_*(w) \Big\rangle &= \Big\langle \cos t \cdot v + \sin t \cdot J_z(v), \cos t \cdot w + \sin t \cdot J_z(w) \Big\rangle \\ &= \cos^2 t \cdot \langle v, w\rangle + \sin^2 t \cdot \langle J_z(v), J_z(w)\rangle \\ &= \langle v, w\rangle \end{aligned}$$

Daher gilt nach (1.1) $\Delta_S(f \circ \varphi_t) = \Delta_S(f) \circ \varphi_t$ für alle $f \in C^2(S)$. Da die Kurve $t \mapsto \varphi_t(x)$ in $t=0$ die Ableitung $J_z(x)$ hat, ist $x \mapsto J_z(x)$ gerade das zu φ_t gehörende Killingfeld und es gilt

$$\Delta_S(D_z f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Delta_S(f \circ \varphi_t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big(\Delta_S(f) \circ \varphi_t\big) = D_z(\Delta_S(f))$$

Also kommutieren Δ_S und D_z. Daher sind alle H^{s-2i} als Eigenräume von Δ_S D_z-invariant, d.h. h_s und D_z kommutieren, denn sie kommutieren auf allen Summanden von P^s in (2.1). □

2.4 Die Beweisidee

Wir betrachten Zylinderkoordinaten (ξ, r, z) auf $\mathfrak{n}$, d.h. wir setzen $r := |x|$ und $\xi := \frac{x}{|x|}$ für einen Punkt $n = x + z$ mit $x \neq 0$. Die Funktionen der Form $\varphi(r,z)\Theta^{p,q}(y_1,y_2)(\xi)$ mit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathfrak{z})$ und $y_1, y_2 \in \mathfrak{v}$ spannen einen dichten Unterraum von $L^2(\mathfrak{n})$ auf. (Die Funktionswerte für $x = 0$ werden durch den auf $\mathfrak{v}$ konstanten Term mit $p = q = 0$ bestimmt.)

In [Sza01] soll nun zum Beweis der Isospektralität der Gebiete B_ρ und B^*_ρ eine lineare Abbildung κ angegeben werden, die die folgende Zuordnung realisiert:

$$\varphi\, h_s\big(\Theta^{p,q}(y_1,y_2)\big) \mapsto \varphi\, h_s\big(\Theta^{*p,q}(y_1,y_2)\big) \tag{2.4}$$

wobei $\Theta^{*p,q}(y_1,y_2)$ analog zu Definition 2.4 mit Hilfe der komplexen Struktur $J^*_{z_0}$ definiert wird. (Mit J_{z_0} ist auch $J^*_{z_0} = \sigma \circ J_{z_0}$ Einheits-Antikommutator.) Die in diesem κ enthaltene lineare Abbildung, die die Zuordnung

$$\Theta^{p,q}(y_1,y_2) \mapsto \Theta^{*p,q}(y_1,y_2)$$

realisieren würde, soll mit κ^* bezeichnet werden. Gäbe es solche Abbildungen κ und κ^*, so daß auch Produkte respektiert werden, d.h.

$$\kappa^*\big(\Theta^{p,q}(y_1,y_2)\Theta^{\tilde p,\tilde q}(\tilde y_1,\tilde y_2)\big) = \kappa^*\big(\Theta^{p,q}(y_1,y_2)\big)\kappa^*\big(\Theta^{\tilde p,\tilde q}(\tilde y_1,\tilde y_2)\big)$$

dann könnte gezeigt werden, daß κ die Laplace-Operatoren Δ und Δ^* der Lie-Algebren $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}^*$ verschränkt. Es gilt nämlich nach Lemma 2.7

$$D_{z_0}(\Theta^{p,q}(y_1,y_2)) = \mathbf{i}(q-p)\Theta^{p,q}(y_1,y_2) \tag{2.5}$$

und für $z \perp z_0$ sieht man ähnlich

$$D_z\big(\Theta^{p,q}(x,y)\big) = -p\lambda_{J_z(x')}\lambda^{p-1}_{x'}\lambda^q_{y''} - q\lambda_{J_z(y'')}\lambda^p_{x'}\lambda^{q-1}_{y''}$$

Da wegen der Antikommutator-Bedingung

$$J_z(x') = \tfrac{1}{2}J_z(x) - \tfrac{\mathbf{i}}{2}J_z(J_{z_0}(x)) = \tfrac{1}{2}\big(J_z(x) + \mathbf{i}J_{z_0}(J_z(x))\big) = J_z(x)''$$

und analog $J_z(x'') = J_z(x)'$ gilt, folgt weiter

$$\begin{aligned} D_z\big(\Theta^{p,q}(x,y)\big) = &- p\Theta^{0,1}(0,J_z(x))\Theta^{p-1,q}(x,y) \\ &- q\Theta^{1,0}(J_z(y),0)\Theta^{p,q-1}(x,y) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Aus (2.5) und (2.6) würde somit (mit der Multiplikativität) $\kappa^* \circ D_z = D^*_z \circ \kappa^*$ für alle $z \in \mathfrak{z}$ folgen, da $J_z = J^*_z$ für $z \perp z_0$ gilt (vgl. Definition in Satz 2.1). Da ferner die D_z nach Lemma 2.10 alle mit h_s kommutieren, würde

$$\kappa \circ D_z = D^*_z \circ \kappa \tag{2.7}$$

und mit Satz 1.13 im Falle des Heisenberg-Typs dann $\kappa \circ \Delta = \Delta^* \circ \kappa$ folgen. Da κ Randwerte auf B_ρ und B_ρ^* respektieren würde, wäre damit die Isospektralität von B_ρ und B_ρ^*, also auch die von B_ρ und B'_ρ bewiesen. Auf weitere Details und den Fall, daß nicht der Heisenberg-Typ vorliegt, soll an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden, da in dem bis hier skizzierten Beweisgang bereits zwei gravierende Probleme auftauchen, die im Folgenden erläutert werden sollen.

2.5 Erstes Problem: Invertierbarkeit der h_s

In [Sza01, Proposition 4.2] wird behauptet, die harmonische Projektion h_s sei injektiv auf den Räumen $P^{p,q}$ und lasse sich sogar zu einem invertierbaren Operator T auf dem gesamten Raum $L^2(S)$ fortsetzen. Darauf gründet sich die Zuordnung (2.4), da hier die Umkehrbarkeit von h_s vorausgesetzt wird. Diese Behauptung ist jedoch nicht haltbar. Die Projektion

$$h_s|_{P^s} : P^s = \bigoplus_{i=0}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} H^{s-2i} \to H^s$$

kann aus Dimensionsgründen nicht injektiv sein und daher auch nicht der Operator T. Daß die Abbildung h_s selbst auf den Teilräumen $P^{p,q}$ (mit $p > 0$ und $q > 0$) nicht injektiv ist, zeigt der folgende Satz. Dazu bemerken wir zunächst:

Lemma 2.11. *Es gilt* $P^{p-1,q-1} \subset P^{p,q}$

Beweis. Sei $\{e_1, \ldots, e_k\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{v}$, so daß $J_{z_0}(e_{2i-1}) = e_{2i}$ und $J_{z_0}(e_{2i}) = -e_{2i-1}$. Eine solche Basis läßt sich stets induktiv finden. Wir setzen

$$R := 2 \sum_{i=1}^{k} \Theta^{1,1}(e_i, e_i) \in P^{1,1}$$

Es gilt, da die $J_{z_0}(e_i)$ bis auf Vorzeichen nur eine Umordnung der e_i sind,

$$\begin{aligned} R = 2 \sum_{i=1}^{k} \lambda_{e'_i} \lambda_{e''_i} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \left(\lambda_{e_i} - \mathbf{i}\lambda_{J_{z_0}(e_i)}\right)\left(\lambda_{e_i} + \mathbf{i}\lambda_{J_{z_0}(e_i)}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \left(\lambda_{e_i}^2 + \lambda_{J_{z_0}(e_i)}^2\right) = r \end{aligned}$$

Daher ist $R \equiv 1$ auf S. Mit Hilfe von Satz A.1 sieht man außerdem leicht

$$\Theta^{p_1,q_1}(x_1, y_1)\Theta^{p_2,q_2}(x_2, y_2) = \left(\lambda_{x'_1}^{p_1} \lambda_{x'_2}^{p_2}\right)\left(\lambda_{y''_1}^{q_1} \lambda_{y''_2}^{q_2}\right) \in P^{p_1+p_2,q_1+q_2}$$

Daher folgt

$$\Theta^{p-1,q-1}(x,y) = R\Theta^{p-1,q-1}(x,y) = 2\sum_{i=1}^{k}\Theta^{1,1}(e_i,e_i)\Theta^{p-1,q-1}(x,y) \in P^{p,q}$$

und damit $P^{p-1,q-1} \subset P^{p,q}$ wie behauptet. □

Satz 2.12. *Seien $p, q > 0$ und $p + q = s$. Dann ist*

$$\ker(h_s|_{P^{p,q}}) = P^{p-1,q-1}$$

Insbesondere ist also h_s nicht injektiv auf $P^{p,q}$. (Für $p = 0$ oder $q = 0$ ist $h_s|_{P^{p,q}}$ nach Satz 2.9 die Identität.)

Beweis. Zum Beweis von $P^{p-1,q-1} \subset \ker(h_s|_{P^{p,q}})$ genügt es nach Lemma 2.11, $h_s(\Theta^{p-1,q-1}(x,y)) = 0$ zu zeigen. Nach (2.1) ist aber

$$r^2\tilde{\Theta}^{p-1,q-1}(x,y) \in r^2\tilde{P}^{s-2} = \bigoplus_{i=1}^{\lfloor \frac{s}{2}\rfloor} r^{2i}\tilde{H}^{s-2i} = \ker\left(\tilde{h}_s\right)$$

woraus das Gewünschte mit der Kommutativität von (2.2) folgt. Sei nun umgekehrt $P \in \ker(h_s|_{P^{p,q}})$. Da $P \in P^{p,q} \subset P^s$ ist, ist es Einschränkung eines $\tilde{P} \in \tilde{P}^s$. Aus (2.2) folgt wiederum $\tilde{h}_s(\tilde{P})|_S = 0$, und da ein homogenes Polynom notwendig verschwindet, wenn es auf S verschwindet, erhalten wir

$$\tilde{P} \in \ker\left(\tilde{h}_s\right) = r^2\tilde{P}^{s-2}$$

also nach Satz 2.8

$$P \in P^{s-2} = \bigoplus_{i=0}^{s-2} P^{i,s-i-2}$$

Da aber P in $P^{p,q}$ und daher nach Lemma 2.7 im Eigenraum von D_{z_0} zum Eigenwert $\mathbf{i}(q-p)$ liegt, folgt nun auch $P \in P^{p-1,q-1}$. □

2.6 Zweites Problem: Definition von κ^*

Der zweite Fehler des Isospektralitäts-Beweises liegt in der Definition der Abbildung κ^*, da die Zuordnung $\Theta^{p,q}(y_1,y_2) \mapsto \Theta^{*p,q}(y_1,y_2)$ nicht eindeutig ist. Dies zeigt das folgende Beispiel, das auf eine Idee von C. Gordon zurückgeht.

Beispiel 2.13. *Wie in Abschnitt 2.4 bemerkt, gilt* $J_{z_0}(x') = J_{z_0}(x)''$ *und* $J_{z_0}(x'') = J_{z_0}(x)'$, *und daher ist mit Lemma 2.3(i)*

$$\begin{aligned}\Theta^{1,1}\big(J_{z_0}(x), J_{z_0}(y)\big) &= \lambda_{J_{z_0}(x)'}\lambda_{J_{z_0}(y)''} = \lambda_{J_{z_0}(x'')}\lambda_{J_{z_0}(y')} \\ &= (-\mathbf{i})\mathbf{i}\lambda_{x''}\lambda_{y'} = \Theta^{1,1}(y,x)\end{aligned} \tag{2.8}$$

Sei wie im Beweis von Satz 2.1 $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 \oplus \mathfrak{v}_2$ *die orthogonale Summe der* J_{z_0}-*invarianten Eigenräume von* σ, *so daß* $J_{z_0} = J_{z_0}^*$ *auf* $\mathfrak{v}_1$ *und* $J_{z_0} = -J_{z_0}^*$ *auf* $\mathfrak{v}_2$. *Wähle nicht-triviale* $x \in \mathfrak{v}_1$ *und* $y \in \mathfrak{v}_2$ *mit* $|x| = |y|$. *Dann ist nach (2.8)*

$$\Theta^{1,1}(J_{z_0}(x+y), J_{z_0}(x+y)) = \Theta^{1,1}(x+y, x+y)$$

aber linke und rechte Seite werden von der Zuordnung $\Theta^{p,q}(x,y) \mapsto \Theta^{*p,q}(x,y)$ *auf unterschiedliche Funktionen abgebildet. Es ist nämlich einerseits*

$$\begin{aligned}\Theta^{*1,1}\big(J_{z_0}(x+y), J_{z_0}(x+y)\big)(x+y) &= \tfrac{1}{4}\left\langle J_{z_0}^*(J_{z_0}(x+y)), x+y\right\rangle^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\left\langle J_{z_0}^2(x) - J_{z_0}^2(y), x+y\right\rangle^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(-|x|^2 + |y|^2)^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

aber andererseits

$$\begin{aligned}\Theta^{*1,1}\big(x+y, x+y\big)(x+y) &= \tfrac{1}{4}\left\langle x+y, x+y\right\rangle^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(|x|^2 + |y|^2)^2 \\ &\neq 0\end{aligned}$$

Also ist $\Theta^{*1,1}(J_{z_0}(x+y), J_{z_0}(x+y)) \neq \Theta^{*1,1}(x+y, x+y)$ *und somit* κ^* *aus [Sza01] schon auf* $P^{1,1}$ *nicht wohldefiniert.*

Auf Nachfrage teilte der Autor mit, κ^* könne widerspruchsfrei definiert werden, wenn in den Termen der Form $\Theta^{p,q}(x,y)$ stets $x \in \mathfrak{v}_i$ und $y \in \mathfrak{v}_j$ mit $i,j \in \{1,2\}$ vorausgesetzt werde. Doch auch mit dieser Einschränkung wurde (wiederum von C. Gordon) ein Beispiel gefunden, in dem κ^* nicht eindeutig definiert ist.

Beispiel 2.14. *Mit (2.8) gilt*

$$\Theta^{1,1}(x,y) + \Theta^{1,1}(y,x) = \Theta^{1,1}\big(J_{z_0}(x), J_{z_0}(y)\big) + \Theta^{1,1}\big(J_{z_0}(y), J_{z_0}(x)\big)$$

Wählen wir x *und* y *wie in Beispiel 2.13, so ist aber wegen* $J_{z_0}^*(x) \perp (x+y)$ *und* $J_{z_0}^*(y) \perp (x+y)$

$$\Theta^{*1,1}(x,y)(x+y) = \tfrac{1}{4}\left\langle x, x+y\right\rangle\left\langle y, x+y\right\rangle = \tfrac{1}{4}|x|^2|y|^2 = \Theta^{*1,1}(y,x)(x+y)$$

und wegen $J_{z_0}(x) \perp (x+y)$ und $J_{z_0}(y) \perp (x+y)$

$$\begin{aligned}\Theta^{*1,1}\big(J_{z_0}(x), J_{z_0}(y)\big)(x+y) &= \tfrac{1}{4}\left\langle J^*_{z_0}(J_{z_0}(x)), x+y\right\rangle \left\langle J^*_{z_0}(J_{z_0}(y)), x+y\right\rangle \\ &= \tfrac{1}{4}\left\langle -x, x+y\right\rangle \left\langle y, x+y\right\rangle \\ &= -\tfrac{1}{4}|x|^2|y|^2 \\ &= \Theta^{*1,1}\big(J_{z_0}(y), J_{z_0}(x)\big)(x+y)\end{aligned}$$

und daher

$$\Theta^{*1,1}(x,y) + \Theta^{*1,1}(y,x) \neq \Theta^{*1,1}\big(J_{z_0}(x), J_{z_0}(y)\big) + \Theta^{*1,1}\big(J_{z_0}(y), J_{z_0}(x)\big)$$

Also ist auch hier κ^* nicht eindeutig definiert.

Allgemeiner kann das Problem wie folgt erkannt werden: Ist P ein Summe von Termen $\Theta^{p,q}(x,y)$ mit $x,y \in \mathfrak{v}_1$ und Q eine solche mit $x,y \in \mathfrak{v}_2$, so soll κ^* auf P die Identität und auf Q die komplexe Konjugation sein. Dann wäre aber

$$\begin{aligned}\kappa^*(\mathbf{i}P)\kappa^*(Q) &= \mathbf{i}P\overline{Q} \\ \kappa^*(P)\kappa^*(\mathbf{i}Q) &= -\mathbf{i}P\overline{Q}\end{aligned}$$

was die Veträglichkeit von κ^* mit der Multiplikation ausschließt.

Noch allgemeiner sieht man, daß die Existenz eines invertierbaren, linearen Operators κ, der Polynomgrade auf $\mathfrak{v}$ erhielte (oder zumindest Automorphismus des Dualraumes $D(\mathfrak{v})$ wäre) und (2.7) für alle $z \in \mathfrak{z}$ erfüllte, schon die Isometrie (und somit die Trivialität des Isospektralitätsproblems) von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}^*$ zur Folge hätte. Es gilt nämlich nach C. Gordon (und einem wichtigen Hinweis von D. Schüth):

Satz 2.15. *Existiert ein Automorphismus κ des Dualraumes $D(\mathfrak{v})$ von $\mathfrak{v}$ mit $D^*_z \circ \kappa = \kappa \circ D_z$ für alle $z \in \mathfrak{z}$, so sind die Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}^*$ isometrisch.*

Beweis. Sei $\lambda : \mathfrak{v} \to D(\mathfrak{v}), x \mapsto \langle x, \cdot\rangle$. Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz ist λ invertierbar. Mit Lemma 2.6 erhalten wir $D_z \circ \lambda = -\lambda \circ J_z$ und analog $D^*_z \circ \lambda = -\lambda \circ J^*_z$, also ist insgesamt für alle $z \in \mathfrak{z}$

$$\begin{aligned}J^*_z &= -\lambda^{-1} \circ D^*_z \circ \lambda = -\lambda^{-1} \circ \big(\kappa \circ D_z \circ \kappa^{-1}\big) \circ \lambda \\ &= \big(\lambda^{-1} \circ \kappa \circ \lambda\big) \circ J_z \circ \big(\lambda^{-1} \circ \kappa \circ \lambda\big)^{-1}\end{aligned}$$

Mit $K := \lambda^{-1} \circ \kappa \circ \lambda$ ist also $J^*_z = KJ_zK^{-1}$. Durch Polarzerlegung erhält man $K = AH$ mit einer Isometrie $A : \mathfrak{v} \to \mathfrak{v}$ und $H := \sqrt{K^TK}$. Da J_z und J^*_z schiefsymmetrisch sind, gilt

$$H^2J_z = K^TKJ_z = K^TJ^*_zK = -K^T(J^*_z)^TK = -J^T_zK^TK = J_zH^2$$

Daher kommutiert J_z auch mit der Quadratwurtel H von H^2 und wir erhalten

$$J_z^* = KJ_zK^{-1} = AHJ_zH^{-1}A^{-1} = AJ_zA^{-1}$$

d.h. $J \simeq J^*$. Mit Satz 1.12 folgt die Isometrie. $\square$

Kapitel 3

Ein anderer Ansatz

Nach den Ausführungen in Kapitel 2 und insbesondere Satz 2.15 ist es nicht erfolgversprechend, die Operatoren D_α und D'_α einzeln verschränken zu wollen. In diesem Kapitel soll ein Ansatz untersucht werden, der versucht, die Operatoren

$$D := -\sum_{\alpha=1}^{l} \partial_\alpha D_\alpha \quad \text{und} \quad D' := -\sum_{\alpha=1}^{l} \partial_\alpha D'_\alpha$$

zu verschränken.

3.1 Zerlegung

Seien die Bezeichnungen wie in Kapitel 1 und Kapitel 2. $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$ seien vom Heisenberg-Typ. Es gilt (mit $k = \dim \mathfrak{v}$)

$$\Delta_{\mathfrak{v}} = \partial_r^2 + \frac{k-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_S$$

also nach Satz 1.13

$$\begin{aligned} \Delta &= \delta + D \\ \Delta' &= \delta + D' \end{aligned} \tag{3.1}$$

mit

$$\delta := \left(1 + \frac{r^2}{4}\right)\Delta_{\mathfrak{z}} + \partial_r^2 + \frac{k-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_S$$

Wie in Abschnitt 2.4 verwenden wir Zylinderkoordinaten (ξ, r, z) auf $\mathfrak{n}$ bzw. $\mathfrak{n}'$. Wir setzen

$$\tilde{B}_\rho := \{(r, z) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{z} \quad ; \ \rho(|z|) \le r\}$$

und definiere damit

$$V_s := \operatorname{span}\left\{\varphi f = \varphi(r,z)f(\xi) \in C^\infty(B_\rho) \quad ; \varphi \in C_c^\infty(\tilde{B}_\rho),\ f \in H^s\right\}$$

und analog $V_s' \subset C^\infty(B_\rho')$. Funktionen in V_s bzw. V_s' erfüllen damit automatisch sowohl die Dirichlet- als auch die Neumann-Randbedingung.

Lemma 3.1. *V_s ist invariant unter Δ und Δ'.*

Beweis. Ist $f \in H^s$, so ist $\Delta_S(f) = s(s+k-2)f$. Für $\varphi f \in V_s$ ist daher

$$\delta(\varphi f) = \left[\left(1+\frac{r^2}{4}\right)\Delta_{\mathfrak{z}} + \partial_r^2 + \frac{k-1}{r}\partial_r + \frac{s(s+k-2)}{r^2}\right](\varphi)f \in V_s$$

Nach Lemma 2.10 kommutieren Δ_S und D_α (bzw. analog D'_α) für jedes α. Daher ist mit $f \in H^s$ auch $D_\alpha(f) \in H^s$ und somit

$$D(\varphi f) = -\sum_{\alpha=1}^{l} \partial_\alpha(\varphi)D_\alpha(f) \in V_s$$

und analog für D'. Nach (3.1) ist also V_s invariant unter Δ und Δ'. □

Es kann nun versucht werden, entweder die Isospektralität der Gebiete B_ρ und B_ρ' auf den Räumen V_s einzeln zu zeigen oder sie auf einem der V_s zu widerlegen. Da δ selbstadjungiert ist und mit D bzw. D' kommutiert, können wir die gemeinsamen Eigenräume betrachten. Mit (3.1) sieht man, daß die Isospektralität von Δ und Δ' also äquivalent zu der von D und D' ist.

Da die Menge $\{\lambda_v^s \quad ; v \in \mathfrak{v}\}$ den Raum P^s aufspannt (vgl. Satz A.1) und dieser endlich-dimensional ist, gibt es eine Basis $(\lambda_{v_1}^s, \ldots, \lambda_{v_n}^s)$ von $H^s \subset P^s$. Also läßt sich jedes $F \in V_s$ schreiben als

$$F = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \lambda_{v_i}^s$$

mit $\varphi_i \in C_c^\infty(\tilde{B}_\rho)$. Damit ist $D(F)$ und $D^2(F)$ durch den folgenden Satz bestimmt:

Satz 3.2. *Für $\varphi \in C_c^\infty(\tilde{B}_\rho)$ und $v \in \mathfrak{v}$ gilt*

(i) $D(\varphi\lambda_v^s) = s\sum_{\alpha=1}^{l}(\partial_\alpha\varphi)\lambda_v^{s-1}\lambda_{J_\alpha(v)}$

(ii) $D^2(\varphi\lambda_v^s) = s\Delta_{\mathfrak{z}}(\varphi\lambda_v^s) + s(s-1)\sum_{\alpha,\beta=1}^{l}(\partial_\alpha\partial_\beta\varphi)\lambda_v^{s-2}\lambda_{J_\alpha(v)}\lambda_{J_\beta(v)}$

und analog für D' mit J'.

Beweis.

(i) folgt sofort mit Lemma 2.6.

(ii) Wir bemerken zunächst mit Lemma 2.6

$$\begin{aligned} D_\alpha \circ D_\beta(\lambda_v^s) &= -sD_\alpha(\lambda_v^{s-1}\lambda_{J_\beta(v)}) \\ &= s\lambda_v^{s-1}\lambda_{J_\alpha(J_\beta(v))} + s(s-1)\lambda_v^{s-2}\lambda_{J_\alpha(v)}\lambda_{J_\beta(v)} \end{aligned}$$

Damit folgt nun (da nach Lemma 1.5(ii) $J_\alpha(J_\beta(v)) = -J_\beta J_\alpha(v)$)

$$\begin{aligned} D^2(\varphi\lambda_v^s) &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{l} (\partial_\alpha\partial_\beta\varphi)(D_\alpha \circ D_\beta(\lambda_v^s)) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{l}(\partial_\alpha^2\varphi)D_\alpha^2(\lambda_v^s) + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha<\beta}}^{l} (\partial_\alpha\partial_\beta\varphi)(D_\alpha \circ D_\beta + D_\beta \circ D_\alpha)(\lambda_v^s) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{l}(\partial_\alpha^2\varphi)\left(-s\lambda_v^s + s(s-1)\lambda_v^{s-2}\lambda_{J_\alpha(v)}^2\right) \\ &\quad + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha<\beta}}^{l} (\partial_\alpha\partial_\beta\varphi) \cdot 2s(s-1)\lambda_v^{s-2}\lambda_{J_\alpha(v)}\lambda_{J_\beta(v)} \\ &= s\Delta_{\mathfrak{z}}(\varphi\lambda_v^s) + s(s-1)\sum_{\alpha,\beta=1}^{l} (\partial_\alpha\partial_\beta\varphi)\lambda_v^{s-2}\lambda_{J_\alpha(v)}\lambda_{J_\beta(v)} \end{aligned}$$

□

3.2 Linearer Fall, Betrachtung von D

Für den Fall $s = 0$ ist die Isospektralität auf V_0 trivial, denn nach Satz 3.2(i) gilt $D = D' = 0$ und damit sogar $\Delta = \Delta'$ auf V_0.

Wir untersuchen also den einfachsten nicht-trivialen Fall, nämlich $s = 1$. Da in [Sza01] in erster Linie die Gebiete $B_\rho^{(a,b)}$ und $B_\rho^{(a',b')}$ in den modifizierten Heisenberg-Algebren aus Beispiel 1.8 mit $a + b = a' + b'$ und $\{a, b\} \neq \{a', b'\}$ betrachtet werden, wollen wir uns hier auf diesen Fall beschränken. (Ohne Einschränkung sei $a < a'$ angenommen.) Dadurch treten die Schwierigkeiten eines potentiellen Isospektralitätsbeweises, die sich selbst für den Fall $s = 1$ schon ergeben, klarer hervor.

Sei $\{e_{ij}\ ;\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq 4\}$ die natürliche Orthonormalbasis von $\mathfrak{v} = \mathbb{H}^m$ $(e_{11} = (1, 0, \ldots, 0), e_{12} = (\mathbf{i}, 0, \ldots, 0), \ldots, e_{m4} = (0, \ldots, 0, \mathbf{k}))$.

Für $\mathfrak{z} = \mathfrak{Im}\,\mathbb{H}$ wählen wir als Basis $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Setze $f_{ij} := \lambda_{e_{ij}}$ und

$$V_{1,i} := \left\{ \sum_{j=1}^{4} \varphi_j f_{ij} \quad ; \ \varphi_j \in C_c^\infty(\tilde{B}_\rho) \right\}$$

Da $H^1 = P^1$ der Dualraum von $\mathfrak{v}$ ist, gilt damit

$$V_1 = \bigoplus_{i=1}^{m} V_{1,i}$$

Wir schreiben $J := J^{(a,b)}$ und $J' := J^{(a',b')}$ und analog für die Vektorfelder D und D'. Dann gilt nach Satz 3.2(i)

$$D(\varphi f_{ij}) = \sum_{\alpha=1}^{3} (\partial_\alpha \varphi) \lambda_{J_\alpha(e_{ij})}$$

und analog für D' und J'. Nach Definition von J und J' (siehe Beispiel 1.8) sind die $V_{1,i}$ also invariant unter D und D' und es gilt

$$\begin{aligned} D|_{V_{1,i}} &= D'|_{V_{1,i}} && \text{für } i \leq a \text{ und } i > a' \\ D|_{V_{1,i}} &= -D'|_{V_{1,i}} && \text{für } a < i \leq a' \end{aligned}$$

Auf den $V_{1,i}$ vom ersten Typ ist die Isospektralität von D und D' klar. Wir betrachten daher einen Raum $V_{1,i}$ vom zweiten Typ. Sei

$$F = \sum_{j=1}^{4} \varphi_i f_{ij} \in V_{1,i}$$

Dann ist

$$D(F) = \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} \partial_\alpha(\varphi_i) \lambda_{J_\alpha(e_{ij})}$$

Die Terme $J_\alpha(e_{ij})$ können leicht bestimmt werden. So ist z.B. für $\alpha = 1$ und $j = 1$ gerade $J_{\mathbf{i}}(e_{i1}) = \mathbf{i} \cdot e_{i1} = e_{i2}$ oder für $\alpha = 3$ und $j = 4$ gerade $J_{\mathbf{k}}(e_{i4}) = \mathbf{k} \cdot e_{i4} = -e_{i1}$, und daher ist $\lambda_{J_{\mathbf{i}}(e_{i1})} = f_{i2}$ bzw. $\lambda_{J_{\mathbf{k}}(e_{i4})} = -f_{i1}$. Insgesamt bestimmt man so

$$D(F) = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_{\mathbf{i}} & -\partial_{\mathbf{j}} & -\partial_{\mathbf{k}} \\ \partial_{\mathbf{i}} & 0 & -\partial_{\mathbf{k}} & \partial_{\mathbf{j}} \\ \partial_{\mathbf{j}} & \partial_{\mathbf{k}} & 0 & -\partial_{\mathbf{i}} \\ \partial_{\mathbf{k}} & -\partial_{\mathbf{j}} & \partial_{\mathbf{i}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{i1} \\ f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix}$$

Das Eigenwertproblem von D auf $V_{1,i}$ ist also die Frage nach den Eigenwerten der obigen Matrix auf dem Raum $C_c^\infty(\tilde{B}_\rho)^4$, oder anders ausgedrückt die Frage nach den Lösungen des partiellen Differentialgleichungs-Systems

$$\begin{aligned}
-\partial_{\mathbf{i}}\varphi_2 - \partial_{\mathbf{j}}\varphi_3 - \partial_{\mathbf{k}}\varphi_4 &= \lambda\varphi_1 \\
\partial_{\mathbf{i}}\varphi_1 - \partial_{\mathbf{k}}\varphi_3 + \partial_{\mathbf{j}}\varphi_4 &= \lambda\varphi_2 \\
\partial_{\mathbf{j}}\varphi_1 + \partial_{\mathbf{k}}\varphi_2 - \partial_{\mathbf{i}}\varphi_4 &= \lambda\varphi_3 \\
\partial_{\mathbf{k}}\varphi_1 - \partial_{\mathbf{j}}\varphi_2 + \partial_{\mathbf{i}}\varphi_3 &= \lambda\varphi_4
\end{aligned}$$

Zum Beweis der Isospektralität von $D|_{V_{1,i}}$ und $D'|_{V_{i,1}} = -D|_{V_{i,1}}$ müßte also gezeigt werden, daß dieses System zu n linear unabhängigen Lösungen für $\lambda = \lambda_0$ immer auch n linear unabhängige Lösungen für $\lambda = -\lambda_0$ besitzt. Dies ist aber nicht ohne Weiteres ersichtlich.

Bemerkung. In einer vereinfachten Version des Gleichungssystems ist das Problem leicht lösbar: Das System

$$\begin{aligned}
-\partial_{\mathbf{i}}\varphi_2 &= \lambda\varphi_1 \\
\partial_{\mathbf{i}}\varphi_1 &= \lambda\varphi_2
\end{aligned}$$

entsteht, wenn man für die modifizierten Heisenberg-Algebren aus Beispiel 1.8 statt des quaternionischen Falls $\mathfrak{v} = \mathbb{H}^{a+b}$ den komplexen Fall mit $\mathfrak{v} = \mathbb{C}^{a+b}$ und $\mathfrak{z} = \mathbf{i}\mathbb{R}$ wählt und analoge Überlegungen wie oben anstellt. Ist (φ_1, φ_2) eine Lösung des Systems für den Eigenwert λ, so ist offenbar $(\varphi_1, -\varphi_2)$ eine Lösung für $-\lambda$, womit die Isospektralität gezeigt ist. Das Ergebnis ist allerdings nicht von Bedeutung, da die so definierten (komplexen) modifizierten Heisenberg-Algebren ohnehin isometrisch sind. Das folgt aus Satz 1.12 wenn man $A : \mathbb{C}^{a+b} \to \mathbb{C}^{a+b}$ als

$$A(x_1, \ldots, x_{a+b}) := (x_1, \ldots, x_a, \overline{x_{a+1}}, \ldots, \overline{x_{a'}}, x_{a'+1}, \ldots, x_{a+b})$$

und $C := \mathrm{Id}$ wählt, denn dann ist für alle $z \in \mathbf{i}\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
AJ_z^{(a,b)}A^{-1}(x_1, \ldots, x_{a+b}) &= A(zx_1, \ldots, -z\overline{x_{a+1}}, \ldots, -zx_{a'+1}, \ldots) \\
&= (zx_1, \ldots, -x_{a+1}\overline{z}, \ldots, -zx_{a'+1}, \ldots) \\
&= J_z^{(a',b')}(x_1, \ldots, x_{a+b})
\end{aligned}$$

Man sieht, daß hier die Kommutativität von $\mathbb{C}$ entscheidend ist.

3.3 Linearer Fall, Betrachtung von D^2

Nach Satz 3.2(ii) gilt $D^2|_{V_1} = \Delta_{\mathfrak{z}}|_{V_1}$. Die Eigenwerte sind also nach Satz 1.1 nicht-negative, reelle Zahlen. Wir betrachten wie im vorhergehenden Abschnitt ein $V_{1,i}$ mit $D|_{V_{1,i}} = -D'_{V_{1,i}}$.

Definition 3.3. Ist λ^2 ein Eigenwert von $D^2|_{V_{1,i}}$, so sei $W_\lambda \subset V_{1,i}$ der entsprechende Eigenraum.

Lemma 3.4. *Mit $\varphi f \in W_\lambda$ sind auch $(\lambda + D)(\varphi f)$ und $(\lambda - D)(\varphi f)$ in W_λ.*

Beweis. Sei $\varphi f \in W_\lambda$. Dann gilt

$$\begin{aligned} D^2\big((\lambda \pm D)(\varphi f)\big) &= \lambda D^2(\varphi f) \pm D^3(\varphi f) \\ &= \lambda^3 \varphi f \pm \lambda^2 D(\varphi f) \\ &= \lambda^2\big((\lambda \pm D)(\varphi f)\big) \end{aligned}$$

also auch $(\lambda \pm D)(\varphi f) \in W_\lambda$. □

Lemma 3.5. *Für $\varphi f \in V_{1,i}$ sind $(\lambda + D)(\varphi f)$ und $(\lambda - D)(\varphi f)$ Eigenfunktionen von D zu den Eigenwerten λ bzw. $-\lambda$.*

Beweis. Man rechnet direkt nach

$$D\big((\lambda \pm D)(\varphi f)\big) = \lambda D(\varphi f) \pm \lambda^2(\varphi f) = \pm\lambda\big((\lambda \pm D)(\varphi f)\big)$$ □

Damit sind $\lambda + D$ und $\lambda - D$ die Projektionen auf die Eigenräume zu den Eigenwerten $+\lambda$ bzw. $-\lambda$ in

$$W_\lambda = W_\lambda^+ \oplus W_\lambda^-$$

Könnte nun für $\lambda > 0$ gezeigt werden, daß $\dim W_\lambda^+ = \dim W_\lambda^-$, so würde die Isospektralität von D und D' auf allen $V_{1,i}$ und damit auf V_1 folgen. Es ist aber noch nicht einmal ersichtlich, daß beide Eigenwerte auftreten (d.h. daß die Dimensionen ungleich 0 sind).

Da die gleichen Überlegungen wie oben auf jeden Operator M anwendbar sind, für den M^2 diagonalisierbar mit nicht-negativen Eigenwerten ist, aber solch ein M natürlich keine negativen Eigenwerte zu haben braucht (z.B. $M = \mathrm{Id}$), müßte ein solcher Beweis notwendig auf weitere Eigenschaften von D zurückgreifen. Die Probleme die sich dabei ergeben, sind allerdings schon im vorhergehenden Abschnitt diskutiert worden.

Schlußbemerkung

Es wurde gezeigt, daß der Beweis für den Ball-Typ aus [Sza01] fehlerhaft ist. Damit ist unklar, ob die gegebenen topologischen Bälle isospektral sind oder nicht. Die Isospektralitätsbeweise der Randsphären und der entsprechenden Bälle und Sphären in den auflösbaren Erweiterungen der zweistufig nilpotenten Lie-Algebren in [Sza05] (und teilweise in [Sza01]) beruhen auf der gleichen Beweisidee und weisen daher die gleichen Fehler auf. Die Frage ihrer Isospektralität ist somit ebenfalls offen.

Von Z. Szabó, C. Gordon und dem Autor wurden verschiedene Versuche unternommen, den Beweis zu korrigieren, was aber bisher nicht gelang. In der vorliegenden Arbeit wurde dargestellt, daß die Beweisidee dafür substantiell modifiziert werden müßte. Ein Ansatz dazu und die selbst in einem einfachen Spezialfall auftretenden Probleme wurden diskutiert.

Ohne weitere Erkenntnisse scheint es ebenso möglich, daß keine Isospektralität vorliegt. Aber auch für einen Beweis der Nicht-Isospektralität könnte der beschriebene Ansatz nützlich sein.

Anhang

Satz A.1 *Sei V ein endlich-dimensionaler reeller oder komplexer Vektorraum. Für $x \in V$ sei $\lambda_x := \langle x, \cdot \rangle$. Jedes homogene Polynom auf V vom Grad n läßt sich schreiben als Summe*

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \lambda_{x_i}^n$$

mit geeigneten $N \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ bzw. $a_i \in \mathbb{C}$ und $x_i \in V$ $(1 \leq i \leq N)$.

Beweis. Es genügt, die Aussage für Monome $\lambda_{y_1} \cdots \lambda_{y_n}$ mit $y_i \in V$ zu beweisen, was wir durch Induktion nach dem Grad n tun. Für $n = 0$ ist die Aussage trivial. Nehmen wir also an, sie sei für ein n bewiesen. Dann gilt für ein Monom vom Grad $n + 1$

$$\lambda_{y_1} \cdots \lambda_{y_{n+1}} = \big(\lambda_{y_1} \cdots \lambda_{y_n}\big)\lambda_{y_{n+1}} = \left(\sum_{i=1}^{N} a_i \lambda_{x_i}^n\right) \lambda_{y_{n+1}}$$

Die Aussage bleibt also nur noch für Monome der Form $\lambda_x^n \lambda_y$ mit $x, y \in V$ zu zeigen. Nun gilt aber mit noch zu wählenden a_j und b_j

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+2} a_j \lambda_{x+b_j y}^{n+1} &= \sum_{j=1}^{n+2} a_j (\lambda_x + b_j \lambda_y)^{n+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n+2} a_j \sum_{\mu=0}^{n+1} \binom{n+1}{\mu} \lambda_x^{n+1-\mu} (b_j \lambda_y)^{\mu} \\
&= \sum_{\mu=0}^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{n+2} a_j b_j^{\mu}\right) \binom{n+1}{\mu} \lambda_x^{n+1-\mu} \lambda_y^{\mu}
\end{aligned}$$

Die Aussage ist bewiesen, wenn a_j und b_j so gewählt werden können, daß der Ausdruck

$$\sum_{j=1}^{n+2} a_j b_j^{\mu}$$

nur für $\mu = 1$ nicht verschwindet. Wir setzen $\mathbf{a} := (a_1, \ldots, a_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ und $\mathbf{b}_\mu := (b_1^\mu, \ldots, b_{n+2}^\mu) \in \mathbb{R}^{n+2}$. Sind die b_j $(1 \leq j \leq n+2)$ paarweise verschieden, so sind die Vektoren $(\mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_{n+1})$ linear unabhängig, denn sie bilden die Vandermonde-Matrix, deren Determinante $\prod_{j<k}(b_j - b_k)$ ist. Setze $U := \operatorname{span}\{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n+1}\}$ und wähle $\mathbf{a} \in U^\perp$. Wegen $\mathbf{b}_1 \notin U$ und da U Hyperebene in $\mathbb{R}^{n+2}$ ist, gilt dann $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_1 \rangle \neq 0$ und $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_\mu \rangle = 0$ für $\mu \neq 1$. Das aber war zu zeigen. □

Der folgende Satz und das darauffolgende Lemma sind [Wei97, Anhang B] entnommen:

Satz A.2 *Sei (X, Y, H) eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2$ auf einem (nicht notwendig endlich-dimensionalen) Vektorraum V. Sei ferner $v \in V$ Eigenvektor von H zum Eigenwert λ, und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $Y^{k+1}v = 0$. Ist dann $\lambda \notin \{2, 3, \ldots, 2k\}$, so gilt*

$$v = v_0 + Xv_1 + X^2v_2 + \cdots + X^kv_k$$

wobei für $0 \leq \nu \leq k$

$$v_\nu := \frac{1}{\nu![-\lambda + 2\nu]_\nu} \sum_{\mu=0}^{k-\nu} \frac{X^\mu Y^{\mu+\nu} v}{\mu![\lambda - 2\nu - 2]_\mu} \in \ker Y$$

Dabei sei $[x]_\nu := x(x-1)\cdots(x-\nu+1)$ das faktorielle Polynom.

Beweis. Für X und Y gilt die Kommutator-Relation

$$[X^\mu, Y] = \mu X^{\mu-1}(H + \mu - 1)$$

denn für $\mu = 1$ ist das die Definition von $H = [X, Y]$ und induktiv sieht man für $\mu + 1$ (unter Verwendung von $[H, X] = 2X$)

$$\begin{aligned} [X^{\mu+1}, Y] &= X^{\mu+1}Y - X^\mu YX + X^\mu YX - YX^{\mu+1} \\ &= X^\mu[X, Y] + [X^\mu, Y]X \\ &= X^\mu H + \mu X^{\mu-1}(H + \mu - 1)X \\ &= X^{\mu-1}(\mu[H, X] + (\mu+1)XH + \mu(\mu-1)X) \\ &= (\mu+1)X^{\mu-1}(XH + \mu X) \\ &= (\mu+1)X^\mu(H + (\mu+1) - 1) \end{aligned}$$

Außerdem folgt aus $[H, Y] = -2Y$ sofort

$$HY^{\mu+\nu} = YHY^{\mu+\nu-1} - 2Y^{\mu+\nu} = \cdots = Y^{\mu+\nu}(H - 2(\mu+\nu))$$

und daher

$$Y\left(\frac{X^\mu Y^{\mu+\nu}v}{\mu![\lambda-2\nu-2]_\mu}\right)=\frac{X^\mu Y^{\mu+\nu+1}v-\mu X^{\mu-1}Y^{\mu+\nu}(H-2\nu-\mu-1)v}{\mu![\lambda-2\nu-2]_\mu}$$
$$=\frac{X^\mu Y^{\mu+\nu+1}v}{\mu![\lambda-2\nu-2]_\mu}-\frac{X^{\mu-1}Y^{\mu+\nu}v}{(\mu-1)![\lambda-2\nu-2]_{\mu-1}}$$

(Der zweite Term fällt für $\mu=0$ weg.) Summation über μ von 0 bis $k-\nu$ ergibt dann

$$Y(v_\nu)=\frac{1}{\nu![-\lambda+2\nu]_\nu}\cdot\frac{X^{k-\nu}Y^{k+1}v}{(k-\nu)![\lambda-2\nu-2]_{k-\nu}}=0$$

da $Y^{k+1}v=0$ nach Voraussetzung. Also ist in der Tat $v_\nu\in\ker Y$.

Es bleibt zu zeigen, daß sich die $X^\nu v_\nu$ zu v addieren. Es gilt aber

$$\sum_{\nu=0}^{k}X^\nu v_\nu=\sum_{\nu=0}^{k}\sum_{\mu=0}^{k-\nu}\frac{X^{\mu+\nu}Y^{\mu+\nu}v}{\mu!\nu![-\lambda+2\nu]_\nu[\lambda-2\nu-2]_\mu}$$
$$=\sum_{l=0}^{k}\left(\sum_{\mu+\nu=l}\frac{1}{\mu!\nu![-\lambda+2\nu]_\nu[\lambda-2\nu-2]_\mu}\right)X^lY^lv$$

Für $l=0$ ist die innere Summe offensichtlich 1. Der Satz ist also bewiesen, wenn sie für $l>0$ verschwindet. Das ergibt sich aber aus dem folgenden Lemma mit $x=\lambda-l-1$, da nach Voraussetzung $\lambda\notin\{2,\dots,2l\}$ ist und für die faktoriellen Polynome

$$[x+\mu]_\nu[-x+\nu]_\mu=[\lambda-l-1+\mu]_\nu[-\lambda+l+1+\nu]_\mu$$
$$=[\lambda-\nu-1]_\nu[-\lambda+\mu+2\nu+1]_\mu$$
$$=(-1)^l[-\lambda+2\nu]_\nu[\lambda-2\nu-2]_\mu$$

gilt. □

Lemma A.3 *Ist $l>0$ und $x\notin\{-l+1,\dots,l-1\}$, so gilt*

$$\sum_{\mu+\nu=l}\frac{1}{\mu!\nu![x+\mu]_\nu[-x+\nu]_\mu}=0$$

Beweis. Zunächst bemerken wir, daß das Polynom $(l+1)$-ten Grades

$$\sum_{\mu+\nu=l}(x+\mu-\nu)\binom{l-x}{\mu}\binom{l+x}{\nu}$$

an den $2l+1$ Stellen $x=-l,\dots,l$ verschwindet und somit für $l>0$ das Nullpolynom ist. In den Summanden mit $\mu > l-x$ oder $\mu < -x$ verschwindet nämlich jeweils einer der Binomialkoeffizienten, und die Summanden für $\max\{-x,0\} \le \mu \le \min\{l-x,l\}$ heben sich wegen

$$(x+(\nu-x)-(\mu+x))\binom{l-x}{\nu-x}\binom{l+x}{\mu+x} = -(x+\mu-\nu)\binom{l-x}{\mu}\binom{l+x}{\nu}$$

alle weg. Daher gilt für alle $x \notin \{-l+1,\dots,l-1\}$, indem wir die Binomialkoeffizienten umschreiben

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\mu+\nu=l} \frac{(x+\mu-\nu)[l-x]_\mu [l+x]_\nu}{\mu!\nu!} \\
&= \sum_{\mu+\nu=l} \frac{[x+l]_{2\nu}\cdot(x+\mu-\nu)\cdot(-1)^{2\mu}[x-l+2\mu-1]_{2\mu}}{\mu!\nu![l+x-\nu]_\nu [l-x-\mu]_\mu} \\
&= [x+l]_{2l+1} \sum_{\mu+\nu=l} \frac{1}{\mu!\nu![x+\mu]_\nu[-x+\nu]_\mu}
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\sum_{\mu+\nu=l} \frac{1}{\mu!\nu![x+\mu]_\nu[-x+\nu]_\mu} = 0$$

für $x \notin \{-l,\dots,l\}$ und aus Stetigkeitsgründen auch für $x=\pm l$. $\square$

Literaturverzeichnis

[Bal04] W. Ballmann: *On the construction of isospectral manifolds.* Geometric Methods in Inverse Problems and PDE Control, C. Croke, I. Lasiecka, G. Uhlmann, M. Vogelius (eds.), IMA Volumes in Mathematics and its Applications 137, Springer-Verlag, 2004, 1-14

[Ber86] P. Bérard: *Spectral Geometry: Direct and Inverse Problems.* Springer Lect. Notes Math. 1207, 1986

[BGM71] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet: *Le Spectre d'une Variété Riemannienne.* Springer Lect. Notes Math. 194, 1971

[DK99] J. Duistermaat, J. Kolk: *Lie Groups.* Springer-Verlag, 1999

[Ebe94] P. Eberlein: *Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric.* Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 27 (1994), 611-660

[GHL90] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine: *Riemannian Geometry.* Second edition, Springer-Verlag, 1990

[Gil84] P. Gilkey: *Invariance Theory, The Heat Equation, And the Atiyah-Singer Index Theorem.* Math. Lect. Ser. 11, Publish or Perish, 1984

[Gor01] C. Gordon: *Isospectral deformations of metrics on spheres.* Invent. Math. 145 (2001), 317-331

[GWW92] C. Gordon, D. Webb, S. Wolpert: *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds.* Invent. Math. 110 (1992), 1-22

[GW97] C. Gordon, E. Wilson: *Continuous families of isospectral Riemannian metrics which are not locally isometric.* J. Diff. Geom. 47 (1997), 504-529

[Kac66] M. Kac: *Can One Hear the Shape of a Drum?* Amer. Math. Monthly 73 (1966), no. 2, 1-23

[Kap80] A. Kaplan: *Fundamental solutions for a class of hypoelliptic PDE generated by composition of quadratic forms.* Trans. Amer. Math. Soc. 258 (1980), 147-153

[Mar05] M. Martens: *Paare isospektraler Metriken auf Ball$\times$Torus-Mannigfaltigkeiten.* Diplomarbeit, Universität Bonn, 2005.

[Mil64] J. Milnor: *Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA 51 (1964)

[ONe83] B. O'Neill: *Semi-Riemannian geometry.* Academic Press, 1983

[Sch99] D. Schüth: *Continuous families of isospectral metrics on simply connected manifolds.* Ann. of Math. 149 (1999), 287-308

[Sch01] D. Schüth: *Isospectral manifolds with different local geometries.* J. reine angew. Math. 534 (2001), 41-94

[Sun85] T. Sunada: *Riemannian coverings and isospectral manifolds.* Ann. Math. 121 (1985), 169-186

[Sza99] Z. Szabó: *Locally Non-isometric yet Super Isospectral Spaces.* Geom. Funct. Anal. 9 (1999), 185-214

[Sza01] Z. Szabó: *Isospectral pairs of metrics on balls, spheres, and other manifolds with different local geometries.* Ann. of Math. 154 (2001), 437-475

[Sza05] Z. Szabó: *A cornucopia of isospectral pairs of metrics on spheres with different local geometries.* Ann. of Math. 161 (2005), 343-395

[Wei97] G. Weingart: *Geometrie der Modulräume minimaler isometrischer Immersionen der Sphären in Sphären.* Dissertation, Bonner Mathematische Schriften 314, 1997